Auxiliar 7: Pre Control

La venganza

Profesora: Gabrielle Nornberg
Auxiliares: Iñaki Ramírez, Rocío Yáñez

P1.- TEU y modelamiento

(a) Considere la ecuación lineal

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

con p, q, g continuas y acotadas en un intervalo I. Muestre que si existe $t_0 \in I$ tal que $y_1(t_0) = y_2(t_0), y_1'(t_0) = y_2'(t_0)$, entonces $y_1 = y_2$ en I.

(b) Considere una partícula en el espacio (x, y, z), la cual está sometida a las fuerzas dadas por $F_x = x$ y $F_y = y$. Además, la velocidad en el eje z está dada por la suma de las posiciones en los ejes x e y. La partícula tiene masa unitaria, y en el instante inicial se encuentra en reposo en la posición $(1, 1, 0)$. Modele la situación y pruebe que el problema tiene única solución.

P2.- Recordemos Cauchy-Euler

Considere la ecuación diferencial

$$x^2y'' - 2\beta xy' + \left(\frac{(2\beta+1)^2}{4} - \frac{1}{4}\right)y = 0, \quad x \geq 0,$$

donde $\beta \in \mathbb{R}$.

(a) Resuelva la ecuación .

(b) Encuentre los valores de β tales que las soluciones sean acotadas cerca de cero, y los valores de β tales que las soluciones tiendan a cero cuando $x \to 0^+$. Similarmente, encuentre los valores de β tales que las soluciones sean no acotadas cerca de cero, y encuentre el límite de estas soluciones cuando $x \to 0^+$.

P3.- Coeficientes Variables

Considere la siguiente ecuación diferencial a coeficientes variables de orden 2 :

$$x^2y'' - xy' + 5y = x, \text{ con } x > 0$$

Para resolver esta ecuación, siga el siguiente procedimiento:

(a) Verifique que $\varphi_1 = x\,\mathrm{sen}(2\ln(x))$ es una solución de la ecuación homogénea asociada.
(b) Calcule el Wronskiano de la ecuación y luego encuentre una segunda solución general de la EDO homogénea. Explicite el conjunto fundamental de soluciones homogéneas. Indicación: $\int \frac{1}{x\,\mathrm{sen}^2(2\ln(x))}dx = \frac{-1}{2}\cot(2\ln(x)) + C$
c) Encuentre la solución particular asociada, y luego escriba la solución general de la EDO no homogénea.

Resumen

Def. 2 (EDO a coef. variables): Una EDO lineal de orden n a coef. variables es de la forma general

$$P(x,D)y = \overline{Q}(x)$$

donde $P(x,D) = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k(x)D^k$ es un operador diferencial de orden n, $\bar{a}_k$ son los coef. (con $\bar{a}_n = 1$) y $\bar{Q}$ el lado derecho.

Def. 3 (EDO a coef. constantes): Una EDO lineal de orden n a coef. constantes es una identidad de la forma:

$$P(D)y = \overline{Q}(x)$$

donde $P(D) = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k D^k, \bar{a}_n = 1$

Def. 4 (EDO homogénea): Una EDO lineal a coef. variables o constantes se dice homogénea si $\bar{Q} \equiv 0$.

EDO lineal orden n	**homogénea** *subespacio $\mathcal{H}$ de soluciones homogéneas*	**no homogénea** *hiperplano $\mathcal{S}$ de soluciones particulares*
coeficientes constantes	$P(D)y = 0$ *polinomio característico* *valores característicos*	$P(D)y = \overline{Q}$ *coeficientes indeterminados* *variación de parámetros*
coeficientes variables	$P(x,D)y = 0$ *fórmula de Abel* *fórmula de Liouville*	$P(x,D)y = \overline{Q}$ *representación de Green* *variación de parámetros*

Cuadro 1. Tabla resumen del estudio de EDO lineales de este capítulo.

Def. 5 (Polinomio característico): El polinomio característico de una EDO es:

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k \lambda^k$$

y sus raíces se llaman valores.

Def. 6 (Sol. de la EDO lineal): Se dice que y es solución de la EDO lineal

$$P(x,D)y = \bar{Q}$$

en el intervalo I si $y \in C^n(I)$ y $P(x,D)y(x) = \bar{Q}(x)$ para todo $x \in I$.

Def. 7 (PC. para EDO's lineales de orden n): El problema de Cauchy para EDO lineales de orden n consiste en encontrar $y \in C^n(I)$ tal que:

$$(\text{PC}) = \begin{cases} P(x,D)y(x) = \bar{Q}(x); \forall x \in I \\ (y(x_0), y'(x_0), ..., y^{n-1}(x_0)) = (y_0^{(0)}, y_0^{(1)}, ... y_0^{n-1}), \end{cases}$$

Teo. 1 (TEU): Supongamos que las funciones $\bar{a}_k(x)$, k = 1,...,n-1 y $\bar{Q}(x)$ son continuas en I. Entonces para cada $x_0 \in I$ y para cada vector de condiciones iniciales, el PC tiene una única solución.

Cor. 1: Notemos que, bajo las hipótesis del teorema anterior, si la EDO lineal es homogénea y con condiciones iniciales nulas, la única solución es la solución nula. Esto es si $\bar{Q} \equiv 0$ y $y_0^{(k)} = 0$ para cada k = 0,...,n - 1, entonces $y \equiv 0$.

Teo. 2: La solución homogénea y_h de la EDO a coeficientes constantes con valores característicos λ_1, λ_2 está dada por:

1. $y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$.
2. $y_h = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$ si $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
3. $y_h = C_1 e^{\sigma x}\sin(wx) + C_2 e^{\sigma x}\cos(wx)$ si $\lambda_{1,2} = \sigma \pm iw$, con $w \neq 0$

Def. 8 (Wronskiano): El Wronskiano de una EDO de orden 2 corresponde a:

$$W(x) = W(y_1, y_2) =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

Donde y_1, y_2 son sols. de la ec. homogénea.

Def. 8 (Sol. particular de una EDO de orden 2): La solución particular y$_p es$:

$$y_p = -y_1 \int \frac{\bar{Q}y_2}{W(y_1,y_2)} + y_2 \int \frac{\bar{Q}y_1}{W(y_1,y_2)}$$

Donde y_1, y_2 son sols. de la ec. homogénea.

P1.- **TEU y modelamiento**

(a) Considere la ecuación lineal

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad y' = \frac{dy}{dt}$$

con p, q, g continuas y acotadas en un intervalo I. Muestre que si existe $t_0 \in I$ tal que $y_1(t_0) = y_2(t_0)$, $y_1'(t_0) = y_2'(t_0)$, entonces $y_1 = y_2$ en I.

Escribimos:

$$Y'' = g(t) - P(t)Y' - q(t)Y$$

Definimos:

$$z(t) = Y'(t)$$
$$z'(t) = Y''(t)$$

Así:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} Y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ g(t) - P(t)Y' - q(t)Y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} z \\ -P(t)z - q(t)Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -P(t) & -q(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix} = F(t, Y, z)$$

Tenemos que la funф es continua respecto a t.

$$\| F(t,X) - F(t,Y) \|_1 = | F_1(t,X) - F_1(t,Y) | + | F_2(t,X) - F_2(t,Y) |$$

$(X_1, X_2) = (u_1, z_1)$, $(Y_1, Y_2) = (u_2, z_2)$

$$= | z_1 - z_2 | + | P(t)z_1 + q(t)u_1 + \cancel{g(t)} - P(t)z_2 - q(t)u_2 - \cancel{g(x)} |$$
$$= |z_1 - z_2| + | P(t)(z_1 - z_2) + q(t)(u_1 - u_2) |$$
$$\leq |z_1 - z_2| + M|z_1 - z_2| + K|u_1 - u_2|$$
$$\leq \max\{1+M, K\}\left(|z_1 - z_2| + |u_1 - u_2| \right)$$
$$\leq L \, \| X - Y \|_1$$

ACOTADA en I!

Debemos tener entonces condiф inicial para $Y, z = Y'$. Luego, dadas las condiciones iniciales si

$\exists$ una sol, esta debe ser única
En este caso, si imponemos:

$$\begin{cases} y'' = g(t) - P(t)y' - q(t)y \\ \qquad y(t_0) = y_1(t_0) = y_2(t_0) \\ \qquad y'(t_0) = y_1'(t_0) = y_2'(t_0) \end{cases}$$

Entonces por TEU $y_1 \equiv y_2$ en I.

(b) Considere una partícula en el espacio (x, y, z), la cual está sometida a las fuerzas dadas por $F_x = x$ y $F_y = y$. Además, la velocidad en el eje z está dada por la suma de las posiciones en los ejes x e y. La partícula tiene masa unitaria, y en el instante inicial se encuentra en reposo en la posición $(1, 1, 0)$. Modele la situación y pruebe que el problema tiene única solución.

- $F_x = x = \ddot{x}$
- $F_y = y = \ddot{y}$
- $\dot{z} = x + y$

Tenemos entonces el sist. de ec.:

$$\begin{cases} x = \ddot{x} \\ y = \ddot{y} \\ \dot{z} = x + y \end{cases}$$

Hacemos el sgt. cambio de variables:

$$w = \dot{x} \qquad r = \dot{y}$$

y construimos el sgt. sist. lineal

$$X'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \\ r \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{w} \\ \dot{r} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ r \\ x \\ y \\ x+y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \\ r \\ z \end{bmatrix}}_{X(t)}$$

Es un sist. lineal.

¿Es Lipchitz respecto al espacio?

Sí! y la cte. de Lipchitz es $\|A\|$!

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ w_1 \\ \gamma_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \qquad X_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ w_1 \\ \gamma_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\| F(X_1,t) - F(X_2,t) \| = \left\| A \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ w_1 \\ \gamma_1 \\ z_1 \end{bmatrix} - A \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ w_2 \\ \gamma_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \right\|$$

$$= \left\| A \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ w_1 - w_2 \\ \gamma_1 - \gamma_2 \\ z_1 - z_2 \end{bmatrix} \right\| = \|A\| \, \|X_1 - X_2\|$$

↳ Lipchitz!

¿Continua respecto al tiempo?
Clara%!

¿Condiciones iniciales para cada variable?
Si! $x(0) = 1$ $\quad w(0) = 0$ $\quad z(0) = 0$
$y(0) = 1$ $\quad \gamma(0) = 0$

La partícula parte en reposo!

$\therefore$ Por TEU, el problema tiene sol. única.

P2.- **Recordemos Cauchy-Euler**

Considere la ecuación diferencial

$$x^2y'' - 2\beta xy' + \left(\frac{(2\beta+1)^2}{4} - \frac{1}{4}\right)y = 0, \quad x \geq 0,$$

donde $\beta \in \mathbb{R}$.

(a) Resuelva la ecuación .

Notamos que la ec. es de la forma:

$a_n x^n y^{(n)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = g(x)$

Luego, es una ec. del tipo Cauchy-Euler

Probemos una sol. $y = x^\alpha$ en la ec.:

$$y = x^\alpha, \quad y' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

Así:

$$\cancel{x^2}\alpha(\alpha-1)x^{\alpha\cancel{-2}} - 2\beta \cancel{x}\alpha x^{\alpha\cancel{-1}} + \left(\frac{(2\beta+1)^2}{4} - \frac{1}{4}\right)x^\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow x^\alpha\left(\alpha(\alpha-1) - 2\beta\alpha + \frac{(2\beta+1)^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = 0$$

Si $x > 0$:

$$\alpha^2 - \alpha - 2\beta\alpha + \beta^2 + \beta + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{4}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha(1+2\beta) + \beta(1+\beta) = 0$$

Resolvemos:

$$\alpha_{1,2} = \frac{1+2\beta \pm \sqrt{(1+2\beta)^2 - 4\beta(1+\beta)}}{2}$$

$$= \frac{1+2\beta \pm \sqrt{1+\cancel{4\beta}+\cancel{4\beta^2}-\cancel{4\beta}-\cancel{4\beta^2}}}{2}$$

$$= \frac{1+2\beta \pm 1}{2}$$

$$\alpha_1 = 1+\beta, \quad \alpha_2 = \beta$$

Así, la sol. es de la forma:

$$y(x) = Ax^{1+\beta} + Bx^\beta \quad //$$

(b) Encuentre los valores de β tales que las soluciones sean acotadas cerca de cero, y los valores de β tales que las soluciones tiendan a cero cuando $x \to 0^+$. Similarmente, encuentre los valores de β tales que las soluciones sean no acotadas cerca de cero, y encuentre el límite de estas soluciones cuando $x \to 0^+$.

- ¿Cuándo las sols. son acotadas?

$$\lim_{x \to 0^+} Y(x) = \lim_{x \to 0^+} Ax^{1+\beta} + Bx^{\beta}$$

$\beta \in \mathbb{Z}$

→ Si $\beta = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} Y(x) = B$$

→ Si $\beta \geq 1$

$$\lim_{x \to 0^+} Y(x) = 0$$

→ Si $\beta \leq -1$

$$\lim_{x \to 0^+} Ax\,x^{\beta} + Bx^{\beta} = \lim_{x \to 0} \frac{Ax + B}{x^{-\beta}} \longrightarrow \infty$$

P3.- Coeficientes Variables

Considere la siguiente ecuación diferencial a coeficientes variables de orden 2 :

$$x^2y'' - xy' + 5y = x, \text{ con } x > 0$$

Para resolver esta ecuación, siga el siguiente procedimiento:

(a) Verifique que $\varphi_1 = x\,\text{sen}(2\ln(x))$ es una solución de la ecuación homogénea asociada.

Veamos que es sol. de la ec. homogénea:

$$x^2y'' - xy' + 5y = 0$$

Calculamos:

$$\varphi_1 = x\sin(2\ln(x))$$

$$\varphi_1' = \sin(2\ln(x)) + \cancel{x}\cos(2\ln(x))\cdot\frac{2}{\cancel{x}}, \quad x>0$$

$$\varphi_1'' = \cos(2\ln(x))\frac{2}{x} - \sin(2\ln(x))\cdot\frac{4}{x}$$

Reemplazamos:

$$x^{\cancel{2}}\left[\cos(2\ln(x))\frac{2}{\cancel{x}} - \sin(2\ln(x))\cdot\frac{4}{\cancel{x}}\right]$$

$$-x\left[\sin(2\ln(x)) + \cos(2\ln(x))\,2\right]$$

$$+ 5x\sin(2\ln(x)) = 0 \;//$$

$\therefore$ φ_1 es sol. de la ec. homogénea.

(b) Calcule el Wronskiano de la ecuación y luego encuentre una segunda solución general de la EDO homogénea. Explicite el conjunto fundamental de soluciones homogéneas. Indicación: $\int \frac{1}{x\,\text{sen}^2(2\ln(x))}dx = \frac{-1}{2}\cot(2\ln(x)) + C$

Tenemos que $H = \{x\sin(2\ln(x)), y_2\}$, donde y_2 es desconocida. Calculando W tenemos:

$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} x\sin(2\ln(x)) & y_2 \\ \sin(2\ln(x)) + 2\cos(2\ln(x)) & y_2' \end{vmatrix}$$

$$= y_2'\,x\sin(2\ln(x)) - y_2(\sin(2\ln(x)) + 2\cos(2\ln(x)))$$

Para encontrar la soluç que nos falta recordamos la fórmula de Abel.

Tenemos entonces

$$W(x) = C\exp\left(-\int \bar{a}_{n-1}\,dx\right)$$

n: grado de la EDO!

$\bar{a}_{n-1}$: Es la EDO normalizada!

$$\Rightarrow x^2y'' - xy' + 5y = x \quad / \tfrac{1}{x^2}$$

$$y'' \underbrace{-\frac{y'}{x}}_{\bar{a}_{n-1} = -1/x} + \frac{5y}{x^2} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow W(x) = C\exp\left(\int \tfrac{1}{x}\,dx\right) = C\exp(\ln(x)) = Cx$$

Igualamos con lo anterior:

$$y_2'\,x\sin(2\ln(x)) - y_2(\sin(2\ln(x)) + 2\cos(2\ln(x))) = Cx$$

$$\Leftrightarrow y_2' - y_2\left(\frac{\sin(2\ln(x)) + 2\cos(2\ln(x))}{x\sin(2\ln(x))}\right) = \frac{C}{\sin(2\ln(x))}$$

Resolvemos con factor integrante:

$$\mu = \exp\left(\int \bar{a}_{n-1}\,dx\right)$$

$$= \exp\left(\int -\frac{1}{x} - \frac{2}{x}\frac{\cos(2\ln(x))}{\sin(2\ln(x))}\,dx\right)$$

$$= \exp(-\ln(x) - \ln(\sin(2\ln(x))))$$

$$= \frac{x^{-1}}{\sin(2\ln(x))} = (x\sin(2\ln(x)))^{-1}$$

Aplicando queda:

$$(\mu y_2)' = \frac{C}{x\sin^2(2\ln(x))} \qquad //\!\!\int$$

$$(X\sin(2\ln(x)))^{-1}Y_2 = \int \frac{C}{X\sin^2(2\ln(X))}\,dX$$

$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

$$= -\frac{C}{2}\cot(2\ln(x)) + C_2$$

$$Y_2 = C\cos(2\ln(x))X + C_2\underbrace{X\sin(2\ln(x))}_{Y_1}$$

→ No queremos que Y_2 dependa de Y_1!

→ Elegimos $C_2 = 0$

→ $Y_2 = \cos(2\ln(x))X$ es sol. de la ec. homogénea!

$\therefore \hat{Y}_2 = C\cos(2\ln(x))X$

El espacio de soluciones nos queda:

$$H = \{x\sin(2\ln(x)),\ x\cos(2\ln(x))\}$$

y la sol. es de la forma:

$$Y_h = Ax\sin(2\ln(x)) + Bx\cos(2\ln(x)) \quad //$$

c) Encuentre la solución particular asociada, y luego escriba la solución general de la EDO no homogénea.

Usamos variac. de parámetros para encontra la sol. particular:

Def. 8 (Sol. particular de una EDO de orden 2): La solución particular $y_p es$:

$$y_p = -y_1\int\frac{\bar{Q}y_2}{W(y_1,y_2)} + y_2\int\frac{\bar{Q}y_1}{W(y_1,y_2)}$$

Donde y_1, y_2 son sols. de la ec. homogénea.

$$\cdot\ W(Y_1,Y_2) = \begin{vmatrix} x\sin(2\ln(x)) & x\cos(2\ln(x)) \\ \sin(2\ln(x)) + \cos(2\ln(x))\cdot 2 & \cos(2\ln(x)) - \sin(2\ln(x))\cdot 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2x\sin^2(2\ln(x)) + \cancel{x\sin(2\ln(x))\cos(2\ln(x))} - \cancel{x\sin(2\ln(x))\cos(2\ln(x))} + 2x\cos^2(2\ln(x))$$

$$= 2x \quad //$$

$$\cdot\ \int \frac{1}{\cancel{X}}\cdot\frac{\cancel{X}\sin(2\ln(x))}{2X}\,dx = \frac{1}{4}\cos(2\ln(x))$$

$$\cdot \int \frac{1}{x} \frac{x\cos(2\ln(x))}{2x}\,dx = \frac{1}{4}\sin(2\ln(x))$$

$$\therefore y_p(x) = \frac{1}{4}\sin(2\ln(x)) \cdot x\sin(2\ln(x)) +$$

$$+ \frac{1}{4}\sin(2\ln(x)) \cdot x\sin(2\ln(x))$$

$$= \frac{x}{4}$$

$$\therefore y(x) = y_h + y_p \;//$$