Auxiliar 7: Pre Control

La venganza

Profesora: Gabrielle Nornberg
Auxiliares: Iñaki Ramírez, Rocío Yáñez

P1.- TEU y modelamiento

(a) Considere la ecuación lineal

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

con p, q, g continuas y acotadas en un intervalo I. Muestre que si existe $t_0 \in I$ tal que $y_1(t_0) = y_2(t_0), y_1'(t_0) = y_2'(t_0)$, entonces $y_1 = y_2$ en I.

(b) Considere una partícula en el espacio (x, y, z), la cual está sometida a las fuerzas dadas por $F_x = x$ y $F_y = y$. Además, la velocidad en el eje z está dada por la suma de las posiciones en los ejes x e y. La partícula tiene masa unitaria, y en el instante inicial se encuentra en reposo en la posición $(1, 1, 0)$. Modele la situación y pruebe que el problema tiene única solución.

P2.- Recordemos Cauchy-Euler

Considere la ecuación diferencial

$$x^2y'' - 2\beta xy' + \left(\frac{(2\beta+1)^2}{4} - \frac{1}{4}\right)y = 0, \quad x \geq 0,$$

donde $\beta \in \mathbb{Z}$.
(a) Resuelva la ecuación .
(b) Encuentre los valores de β tales que las soluciones sean acotadas cerca de cero, y los valores de β tales que las soluciones tiendan a cero cuando $x \to 0^+$. Similarmente, encuentre los valores de β tales que las soluciones sean no acotadas cerca de cero, y encuentre el límite de estas soluciones cuando $x \to 0^+$.

P3.- Coeficientes Variables

Considere la siguiente ecuación diferencial a coeficientes variables de orden 2 :

$$x^2y'' - xy' + 5y = x, \text{ con } x > 0$$

Para resolver esta ecuación, siga el siguiente procedimiento:
(a) Verifique que $\varphi_1 = x\operatorname{sen}(2\ln(x))$ es una solución de la ecuación homogénea asociada.
(b) Calcule el Wronskiano de la ecuación y luego encuentre una segunda solución general de la EDO homogénea. Explicite el conjunto fundamental de soluciones homogéneas. Indicación: $\int \frac{1}{x\operatorname{sen}^2(2\ln(x))}dx = \frac{-1}{2}\cot(2\ln(x)) + C$
c) Encuentre la solución particular asociada, y luego escriba la solución general de la EDO no homogénea.

Resumen

Teo. 1 (TEU global): Sea I un intervalo. Supongamos que $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua con respecto a su primera variable y globalmente Lipschitz con respecto a su segunda variable. Entonces para cada $x_0 \in I$ e $y0 \in \mathbb{R}$ existe una única solución global $y \in C^1(I)$ del PC.
Teo. : La solución homogénea y_h de la EDO a coeficientes constantes con valores característicos λ_1, λ_2 está dada por:

1. $y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$.
2. $y_h = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$ si $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
3. $y_h = C_1 e^{\sigma x} \sin(wx) + C_2 e^{\sigma x} \cos(wx)$ si $\lambda_{1,2} = \sigma \pm iw$, con $w \neq 0$

Def. 8 (Wronskiano): El Wronskiano de una EDO de orden 2 corresponde a:

$$W(x) = W(y_1, y_2) =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

Donde y_1, y_2 son sols. de la ec. homogénea.
Def. 8 (Sol. particular de una EDO de orden 2): La solución particular y$_p es$:

$$y_p = -y_1 \int \frac{\bar{Q} y_2}{W(y_1, y_2)} + y_2 \int \frac{\bar{Q} y_1}{W(y_1, y_2)}$$

Donde y_1, y_2 son sols. de la ec. homogénea.
Def. 8 (Ecs. de Cauchy Euler): Una ecuación de la forma:

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

se denomina ecuación de Cauchy-Euler y una forma de resolverlas es probando una solución de la forma $y = x^m$.
Def. 8 (L.I.): Las funciones $y_1, ..., y_k$ en $C^n(I)$ son linealmente independientes (l.i.) si la afirmación:

$$C_1 y_1(x) + \cdots + C_k y_k(x) \equiv 0, \forall x \in I$$

implica necesariamente que todos los coeficientes C1, . . . , Ck son cero. Si por el contrario existen C1,...,Ck tales que al menos uno es distinto de cero y se tiene (27), decimos que las funciones y1, . . . , yk son linealmente dependientes (l.d.).
Def. 5 (Espacio sols. homogéneas): Denotemos por $\mathcal{H}$ el conjunto de todas las soluciones de la ecuación homogénea:

$$\mathcal{H} = \{y \in C^n(I) : y^{(n)}(x) + \cdots + \bar{a}_1(x) y\prime(x) + \bar{a}_0(x) y(x) = 0 \forall x \in I\}.$$

Teo. 2: $\mathcal{H}$ es subespacio vectorial de $C^n(I)$ de dimensión n.
Def. 5 (Espacio sols. no homogéneas): Denotamos por $\mathcal{S}$ el conjunto de todas las soluciones de la ecuación diferencial lineal de orden n no homogénea:

$$\mathcal{S} = \{y \in C^n(I) | y^{(n)} + \cdots + \bar{a}_1(x) y\prime + \bar{a}_0(x) y = \bar{Q} \forall x \in I\}$$

. **Def. 5 (Hiperplano):** Un hiperplano o subespacio afín es un conjunto de la forma:

$$x + A = \{z \in X | z = x + a \text{ para algún } a \in A\}.$$

Teo. 2: Si $y_p \in \mathcal{S}$ es cualquier solución de la ecuación no homogénea, entonces $\mathcal{S} = y_p + \mathcal{H}$.
Cor. 2: Todo elemento de $\mathcal{S}$ se escribe de la forma:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n + y_p$$

donde $y_1, ..., y_n$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea, y_p es cualquier solucion particular de la ecuación no homogénea y las $C_i \in \mathbb{R}$ son constantes arbitrarias que dependen del vector de condiciones iniciales.
Teo. 2 (Fórmula de Abel): Sean $y_1, ..., y_n \in \mathcal{H}$. Entonces el Wronskiano W satisface:

$$W(x) = C exp(- \int \bar{a}_{n-1}(x) dx)$$

con $C \in \mathbb{R}$. En particular, si se anula en un punto, se anula siempre.