Auxiliar 5: Polinomio Característico

Subiendo de nivel

Profesora: Gabrielle Nornberg
Auxiliares: Iñaki Ramírez, Rocío Yáñez

P1.- EDO's de orden 2

- $y'' + 3y' + 4y = 0$
- $4y'' - 12y' + 9y = 0; y(0) = 1; y'(0) = 2$
- $y'' - 7y' + 10y = 0$

P2.- Buscando soluciones

Considere el problema de Cauchy:

$$\text{(PC)}\ u'' + \frac{2}{t}u' + V(t)u = 0, \quad u(1) = 0, \quad u'(1) = 1,$$

donde el potencial V es continuo y acotado para $t \geq 1, u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

(a) Compruebe que el problema (PC) tiene única solución local definida positivamente en un vecindario a la derecha de $t_0 = 1$.

(b) Muestre que si u es una solución positiva de (PC) en $(1, R)$ con $u(R) = 0$ entonces $u'(R) < 0$.

P3.- Ecs. de Cauchy-Euler

Una ecuación de la forma:

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x)$$

se denomina ecuación de Cauchy-Euler y una forma de resolverlas es probando una solución de la forma $y = x^m$. Resuelva las siguientes ecuaciones:

- $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 4y = 0$
- $4x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 15y; y(1) = -1; y'(1) = -\frac{1}{2}$
- $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 4x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} = 0$

Resumen

Def. 1 (Operador a coef. constantes): Un operador diferencial lineal de orden n a coef. constantes tiene la forma:

$$P(D) = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k$$

$$= a_n D^n + a_{n-1}(x) D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0,$$

Def. 2 (EDO a coef. variables): Una EDO lineal de orden n a coef. variables es de la forma general

$$P(x, D)y = \overline{Q}(x)$$

donde $P(x, D) = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k(x) D^k$ es un operador diferencial de orden n, $\bar{a}_k$ son los coef. (con $\bar{a}_n = 1$) y $\bar{Q}$ el lado derecho.
Def. 3 (EDO a coef. constantes): Una EDO lineal de orden n a coef. constantes es una identidad de la forma:

$$P(D)y = \overline{Q}(x)$$

donde $P(D) = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k D^k, \bar{a}_n = 1$
Def. 4 (EDO homogénea): Una EDO lineal a coef. variables o constantes se dice homogénea si $\bar{Q} \equiv 0$.

EDO lineal orden n	**homogénea** *subespacio $\mathcal{H}$ de soluciones homogéneas*	**no homogénea** *hiperplano $\mathcal{S}$ de soluciones particulares*
coeficientes constantes	$P(D)y = 0$ *polinomio característico* *valores característicos*	$P(D)y = \overline{Q}$ *coeficientes indeterminados* *variación de parámetros*
coeficientes variables	$P(x,D)y = 0$ *fórmula de Abel* *fórmula de Liouville*	$P(x,D)y = \overline{Q}$ *representación de Green* *variación de parámetros*

Cuadro 1. Tabla resumen del estudio de EDO lineales de este capítulo.

Def. 5 (Polinomio característico): El polinomio característico de una EDO es:

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k \lambda^k$$

y sus raíces se llaman valores.
Def. 6 (Sol. de la EDO lineal): Se dice que y es solución de la EDO lineal

$$P(x, D)y = \bar{Q}$$

en el intervalo I si $y \in C^n(I)$ y $P(x, D)y(x) = \bar{Q}(x)$ para todo $x \in I$.
Def. 7 (PC. para EDO's lineales de orden n): El problema de Cauchy para EDO lineales de orden n consiste en encontrar $y \in C^n(I)$ tal que:

$$(\text{PC}) = \begin{cases} P(x, D)y(x) = \bar{Q}(x); \forall x \in I \\ (y(x_0), y'(x_0), ..., y^{n-1}(x_0)) = (y_0^{(0)}, y_0^{(1)}, ...y_0^{n-1}), \end{cases}$$

Teo. 1 (TEU): Supongamos que las funciones $\bar{a}_k(x)$, k = 1,...,n-1 y $\bar{Q}(x)$ son continuas en I. Entonces para cada $x_0 \in I$ y para cada vector de condiciones iniciales, el PC tiene una única solución.
Cor. 1: Notemos que, bajo las hipótesis del teorema anterior, si la EDO lineal es homogénea y con condiciones iniciales nulas, la única solución es la solución nula. Esto es si $\bar{Q} \equiv 0$ y $y_0^{(k)} = 0$ para cada k = 0,...,n - 1, entonces $y \equiv 0$.
Teo. 2: La solución homogénea y_h de la EDO a coeficientes constantes con valores característicos λ_1, λ_2 está dada por:

1. $y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$.
2. $y_h = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{\lambda x}$ si $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
3. $y_h = C_1 e^{\sigma x} \sin(wx) + C_2 e^{\sigma x} \cos(wx)$ si $\lambda_{1,2} = \sigma \pm iw$, con $w \neq 0$

Def. 8 (Wronskiano): El Wronskiano de una EDO de orden 2 corresponde a:

$$W(x) = W(y_1, y_2) =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x) y_2'(x) - y_2(x) y_1'(x)$$

Donde y_1, y_2 son sols. de la ec. homogénea.

- $y'' + 3y' + 4y = 0$

Usamos la forma de operadores:

$$(D^2 + 3D + 4)Y = 0$$

$$P(D)Y = 0 \rightsquigarrow \text{notaø de operadores.}$$

Entonces el polinomio característico asociado corresponde a:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0$$

Calculamos sus raíces:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot 4}}{2} = \frac{-3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i$$

Luego, usamos:

3. $y_h = C_1 e^{\sigma x}\sin(wx) +$ [redacted] $C_2 e^{\sigma x}\cos(wx)$ si $\lambda_{1,2} = \sigma \pm iw$, con $w \neq 0$

Con lo que la sol. nos queda

$$Y_h = C_1 e^{-\frac{3}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + C_2 e^{-3/2}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) //$$

$4y'' - 12y' + 9y = 0; y(0) = 1; y'(0) = 2$

$$(4D^2 - 12D + 9)Y = 0$$

$$\Leftrightarrow (4\lambda^2 - 12\lambda + 9) = 0$$

Usamos la fórmula:

$$\lambda_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{\cancel{144 - 4\cdot 4\cdot 9}^{\,0}}}{8} = \frac{3}{2}$$

Luego tenemos que la soluø está dada por:

$$Y_h = C_1 e^{3/2 x} + C_2 e^{3/2 x} x$$

Despejemos las cts.:

$$Y_h(0) = C_1 = 1$$

Por otro lado:

$$Y'_h = \frac{3}{2} e^{3/2 x} + C_2\left(e^{3/2 x}\cdot x\cdot\frac{3}{2} + e^{3/2 x}\right)$$

$$\Rightarrow Y'(0) = \frac{3}{2} + C_2 = 2$$

$$\Leftrightarrow C_2 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore Y_h = e^{3/2 x} + \frac{x}{2} e^{3/2 x}$$

$. y'' - 7y' + 10y = 0$

Tenemos: $(D^2 - 7D + 10)Y = 0$

$$\Rightarrow (\lambda^2 - 7\lambda + 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0$$

$$\therefore \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 5$$

Así el espacio de sols. homogéneas es de la forma:

$$H = \{ e^{2x}, e^{5x} \}$$

Y nuestra sol. es de la forma:

$$Y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}$$

P2.- **Buscando soluciones**

Considere el problema de Cauchy:

$$\text{(PC)} \ u'' + \frac{2}{t}u' + V(t)u = 0, \quad u(1) = 0, \quad u'(1) = 1,$$

donde el potencial V es continuo y acotado para $t \geq 1$, $u' = \frac{du}{dt}$.

(a) Compruebe que el problema (PC) tiene única solución local definida positivamente en un vecindario a la derecha de $t_0 = 1$.

Sea $\varepsilon > 0$

P.d.q. (PC) Tiene solud única en $(t_0, t_0 + \varepsilon)$

Despejamos

$$u'' = -\frac{2}{t} u' - V(t) u = f(t, u(t), u'(t))$$

Usamos el cambio de variable:

$$z(t) = u'(t)$$

$$z'(t) = u''(t) = f(t, u(t), u'(t))$$

$$\Rightarrow X(t) = \begin{pmatrix} u \\ z \end{pmatrix}(t), \quad X'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ f(t,u,z) \end{pmatrix}$$

El objetivo es encontrar una ec. de la forma:

$$X'(t) = F(t, X(t))$$

Recordamos:

TEOREMA 2.2. *Sea I un intervalo. Tomemos $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$. Supongamos que $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua (con respecto a su primera variable) en x_0. Supongamos también que existen $r, \delta, L > 0$ tales que $|f(x,y) - f(x,z)| \leq L|y - z|$ siempre que $y, z \in [y_0 - r, y_0 + r]$ y $x \in I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Denotemos*

$$M = \text{máx}\{|f(x,y)| \mid x \in I,\ |x - x_0| \leq \delta,\ |y - y_0| \leq r\},$$

$$\delta_0 = \text{mín}\left\{\delta, \frac{r}{M}\right\}, \quad y \quad J = I \cap (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0).$$

Entonces existe una única solución local $y \in C^1(J)$ del problema de Cauchy (PC).

$f(t, u, z) = 2z$

Veamos que $F : (1, 1+\varepsilon) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sea Lipchitz

$$F(t,u,z) = \begin{pmatrix} z \\ -\frac{2z}{t} - V(t)u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -V(t) & -\frac{2}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ z \end{pmatrix}$$

$$\|F(t,X) - F(t,Y)\| = |F_1(t,X) - F_1(t,Y)| + |F_2(t,X) - F_2(t,Y)|$$

$(X_1, X_2) = (u_1, z_1)$, $(Y_1, Y_2) = (u_2, z_2)$

$$= |z_1 - z_2| + \left|-\frac{2z_1}{t} - V(t)u_1 + \frac{2z_2}{t} + V(t)u_2\right|$$

$$\leq |z_1 - z_2| + \frac{2}{t}|z_1 - z_2| + \underbrace{|V(t)|}_{\leq C}|u_1 - u_2|$$

$\rightsquigarrow$ con $t \in [1, 1+\varepsilon]$

$\|(X,Y)\| = |X| + |Y|$

$\|(X_1 - X_2, Y_1 - Y_2)\|$

$$\leq |z_1 - z_2| + 2|z_1 - z_2| + C|u_1 - u_2|$$

$$= 3|z_1 - z_2| + C|u_1 - u_2|$$

$$\leq \text{máx}\{3, C\}(|z_1 - z_2| + |u_1 - u_2|)$$

$$= \text{máx}\{3, C\}\|X - Y\|_1$$

$\therefore$ F es Lipchitz local.

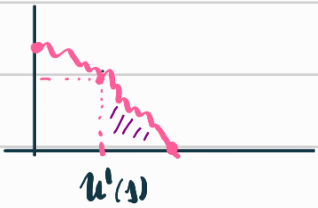
Veamos ahora que la sol. es positiva:

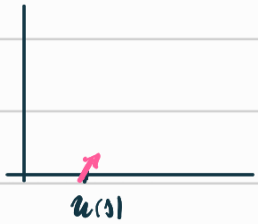
Sabemos que como u es sol. de la EDO

$\Rightarrow u, u'$ son continuas!

Como $u(1)=0$, $u'(1)=1$

$\Rightarrow \exists t_0>1$ tq $u'(t)>0$, $\forall t\in[1,t_0]$



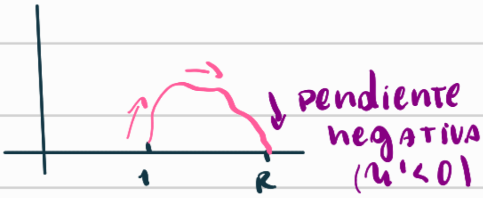


$\Rightarrow u(t)-u(1)>0$

$\Rightarrow u(t)>0 \quad \forall t\in[1,t_0]$

Si tomamos $\varepsilon = t_0-1$ concluimos. //

(b) Muestre que si u es una solución positiva de (PC) en $(1,R)$ con $u(R)=0$ entonces $u'(R)<0$.



Veamos por contradicción:

- Si $u'(R)>0 \Rightarrow \exists \varepsilon>0$, $u'(t)>0$ $\forall t\in[R-\varepsilon,R]$ y como $u>0$ en $[R-\varepsilon,R] \Rightarrow u(R)>0$ $\times$. (a)

- Si $u'(R)=0$

  Por TEU (local):

$$(P)\begin{cases} u''+\dfrac{2u'}{t}+V(t)u=0\\ u(R)=0\\ u'(R)=0\end{cases}$$

$\Rightarrow u\equiv 0$ $\times$ pq supusimo $u>0$ (positiva) en $(1,R)$

$\therefore u'(R)<0$ //

P3.- **Ecs. de Cauchy-Euler**

Una ecuación de la forma:

$$a_n x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_1x\frac{dy}{dx}+a_0y=g(x)$$

se denomina ecuación de Cauchy-Euler y una forma de resolverlas es probando una solución de la forma $y=x^m$. Resuelva las siguientes ecuaciones:

- $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}-4y=0$

Probando con $y=x^m \Rightarrow y'=mx^{m-1}$, $y''=m(m-1)x^{m-2}$

Luego

$\cancel{x^2}\, m(m-1)x^{m\cancel{-2}} - 2\cancel{x}\,m x^{m\cancel{-1}} - 4x^m = 0$

$x^m(m^2-m-2m-4)=0$

$x^m(m^2-3m-4)=0 \Leftrightarrow m^2-3m-4=0$

$$\Rightarrow m_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+4\cdot 4}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}.$$

$$m_1 = 4, \quad m_2 = -1$$

Luego, la sol. está dada por

$$y(x) = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_2} = C_1 x^4 + C_2 x^{-1}$$

- $4x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 15y \overset{}{=} 0; y(1) = -1; y'(1) = -\frac{1}{2}$

Nueva %:

Probando con $y = x^m \Rightarrow y' = m x^{m-1}, \; y'' = m(m-1) x^{m-2}$

Tenemos:

$$4\cancel{x^2}\, m(m-1) x^{m-\cancel{2}} - 15 x^m = 0$$

$$x^m (4m^2 - 4m - 15) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m - 15 = 0$$

$$\Rightarrow m_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4\cdot 4\cdot 15}}{8} = \frac{4 \pm \cancelto{16}{\sqrt{256}}}{8}$$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{4+16}{8} = \frac{5}{2}, \quad m_2 = \frac{4-16}{8} = \frac{-3}{2}$$

y la sol es de la forma:

$$y(x) = C_1 x^{5/2} + C_2 x^{-3/2}$$

V

Despejemos C_1, C_2:

$$y(1) = C_1 + C_2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = -(C_2 + 1)$$

Además

$$y'(x) = \frac{5}{2} C_1 x^{5/2 - 1} - \frac{3}{2} C_2 x^{-3/2 - 1}$$

$$\Rightarrow y'(1) = \frac{5}{\cancel{2}} C_1 - \frac{3}{\cancel{2}} C_2 = -\frac{1}{\cancel{2}} \quad \Leftrightarrow \quad +5C_2 + 5 + 3C_2 = -1$$

$\Leftrightarrow \quad 8C_2 = -4 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad C_1 = -\left(-\dfrac{1}{2} + 1\right) = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore \quad y(x) = -\dfrac{x^{5/2}}{2} - \dfrac{x^{-3/2}}{2}$

- $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 4x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} = 0$

Probando con $y = x^m \Rightarrow y' = m x^{m-1}$, $y'' = m(m-1)x^{m-2}$
$y''' = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$

Tenemos:

$x^{\cancel{3}} m(m-1)(m-2)x^{m\cancel{-3}} + 4x^{\cancel{2}} m(m-1)x^{m\cancel{-2}} - 4\cancel{x} m x^{m\cancel{-1}} = 0$

$x^m m[m^2 - 2m - m + 2 + 4m - 4 - 4] = 0$

$x^m m[m^2 + m - 6] = 0$

$\Leftrightarrow \quad m(\underbrace{m^2 + m - 6}_{(m-2)(m+3)} = 0)$

$\therefore \quad m_1 = 0, \quad m_2 = 2, \quad m_2 = -3$

Así

$y(x) = C_1 \cancel{x^0}^{\,1} + C_2 x^2 + C_3 x^{-3}, \quad$ con $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$