# Auxiliar 5: Polinomio Característico

Subiendo de nivel

**Profesora: Gabrielle Nornberg**
Auxiliares: Iñaki Ramírez, Rocío Yáñez

**P1.-** **EDO's de orden 2**

- $y'' + 3y' + 4y = 0$
- $4y'' - 12y' + 9y = 0; y(0) = 1; y'(0) = 2$
- $y'' - 7y' + 10y = 0$

**P2.-** **Buscando soluciones**

Considere el problema de Cauchy:

$$(\text{PC})\ u'' + \frac{2}{t}u' + V(t)u = 0, \quad u(1) = 0, \quad u'(1) = 1,$$

donde el potencial $V$ es continuo y acotado para $t \geq 1, u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

(a) Compruebe que el problema ( PC) tiene única solución local definida positivamente en un vecindario a la derecha de $t_0 = 1$.

(b) Muestre que si u es una solución positiva de ( PC) en $(1, R)$ con $u(R) = 0$ entonces $u'(R) < 0$.

**P3.-** **Ecs. de Cauchy-Euler**

Una ecuación de la forma:

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x)$$

se denomina ecuación de Cauchy-Euler y una forma de resolverlas es probando una solución de la forma $y = x^m$. Resuelva las siguientes ecuaciones:

- $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 4y = 0$
- $4x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 15y = 0; y(1) = -1; y'(1) = -\frac{1}{2}$
- $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 4x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} = 0$

## Resumen

**Def. 1 (Operador a coef. constantes):**Un operador diferencial lineal de orden n a coef. constantes tiene la forma:

$$P(D) = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k$$

$$= a_n D^n + a_{n-1}(x) D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0,$$

**Def. 2 (EDO a coef. variables):** Una EDO lineal de orden n a coef. variables es de la forma general

$$P(x, D)y = \overline{Q}(x)$$

donde $P(x, D) = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k(x) D^k$ es un operador diferencial de orden n, $\bar{a}_k$ son los coef. (con $\bar{a}_n = 1$) y $\bar{Q}$ el lado derecho.

**Def. 3 (EDO a coef. constantes):**Una EDO lineal de orden n a coef. constantes es una identidad de la forma:

$$P(D)y = \overline{Q}(x)$$

donde $P(D) = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k D^k, \bar{a}_n = 1$

**Def. 4 (EDO homogénea):** Una EDO lineal a coef. variables o constantes se dice homogénea si $\bar{Q} \equiv 0$.

| **EDO lineal orden $n$** | **homogénea** *subespacio $\mathcal{H}$ de soluciones homogéneas* | **no homogénea** *hiperplano $\mathcal{S}$ de soluciones particulares* |
|---|---|---|
| **coeficientes constantes** | $P(D)y = 0$ *polinomio característico valores característicos* | $P(D)y = \overline{Q}$ *coeficientes indeterminados variación de parámetros* |
| **coeficientes variables** | $P(x, D)y = 0$ *fórmula de Abel fórmula de Liouville* | $P(x, D)y = \overline{Q}$ *representación de Green variación de parámetros* |

Cuadro 1. Tabla resumen del estudio de EDO lineales de este capítulo.

**Def. 5 (Polinomio característico):**El polinomio característico de una EDO es:

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k \lambda^k$$

y sus raíces se llaman valores.

**Def. 6 (Sol. de la EDO lineal):**Se dice que y es solución de la EDO lineal

$$P(x, D)y = \bar{Q}$$

en el intervalo $I$ si $y \in C^n(I)$ y $P(x, D)y(x) = \bar{Q}(x)$ para todo $x \in I$.

**Def. 7 (PC. para EDO's lineales de orden n):**El problema de Cauchy para EDO lineales de orden n consiste en encontrar $y \in C^n(I)$ tal que:

$$(\text{PC}) = \begin{cases} P(x, D)y(x) = \bar{Q}(x); \forall x \in I \\ \\ (y(x_0), y'(x_0), ..., y^{n-1}(x_0)) = (y_0^{(0)}, y_0^{(1)}, ...y_0^{n-1}), \end{cases}$$

**Teo. 1 (TEU):**Supongamos que las funciones $\bar{a}_k(x)$, k = 1,...,n-1 y $\bar{Q}(x)$ son continuas en $I$. Entonces para cada $x_0 \in I$ y para cada vector de condiciones iniciales, el PC tiene una única solución.

**Cor. 1:**Notemos que, bajo las hipótesis del teorema anterior, si la EDO lineal es homogénea y con condiciones iniciales nulas, la única solución es la solución nula. Esto es si $\bar{Q} \equiv 0$ y $y_0^{(k)} = 0$ para cada k = 0,...,n - 1, entonces $y \equiv 0$.

**Teo. 2:**La solución homogénea $y_h$ de la EDO a coeficientes constantes con valores característicos $\lambda_1, \lambda_2$ está dada por:

1. $y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$.
2. $y_h = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$ si $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
3. $y_h = C_1 e^{\sigma x} \sin(wx) + C_2 e^{\sigma x} \cos(wx)$ si $\lambda_{1,2} = \sigma \pm iw$, con $w \neq 0$

**Def. 8 (Wronskiano):** El Wronskiano de una EDO de orden 2 corresponde a:

$$W(x) = W(y_1, y_2) =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x) y_2'(x) - y_2(x) y_1'(x)$$

Donde $y_1, y_2$ son sols. de la ec. homogénea.