Auxiliar 3: Pre-Control

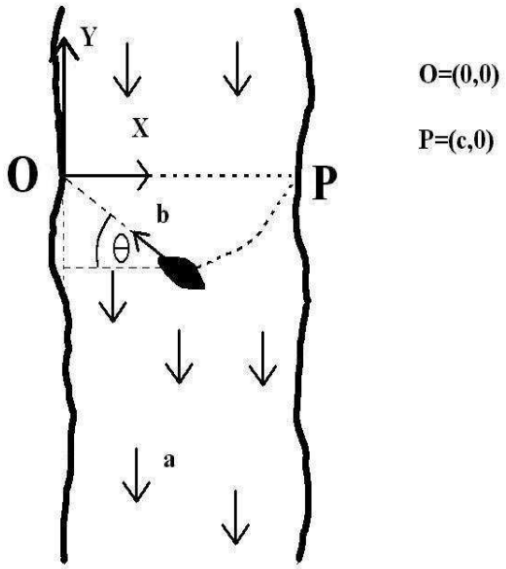
Salvando el C1

Profesora: Gabrielle Nornberg
Auxiliares: Iñaki Ramírez, Rocío Yáñez

P1.- **Curva de persecusión**

Sobre un río, en la posición $P = (c, 0)$, un bote trata de alcanzar la orilla situada en la posición $O = (0, 0)$. Se quiere caracterizar la posición en el eje OY con respecto a la posición en el eje OX. La rapidez de la corriente del río es a en dirección $(0, -1)$. La rapidez del bote es b en dirección $(-\cos(\theta), \text{sen}(\theta))$ donde $\theta = \theta(t)$ va variando en el tiempo de manera que este vector apunta siempre hacia O. Si las coordenadas del bote en un tiempo dado son $B = (x, -y)$:

1. Utilizando el cambio de variable $z = \frac{y}{x}$, encuentre una EDO lineal homogénea en función de las variables z, x.
2. Encuentre la ec. para caracterizar la posición en el eje OY con respecto a la posición en el eje OX. Se tiene la condición $y(c) = 0$ para despejar la cte.
   Hint: $\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = ln(|z + \sqrt{1+z^2}|)$.



P2.- **Resuelva las siguientos EDO's:**

- $y^{-1}y' + \sin(x)e^{\cos(x)}y = 0$
- $y' = \frac{6x-4y}{x-y}$
- $y' + 3x^2y = x^2$
- $\frac{1}{y^2} = xy' + y$
- $yy'' = (y')^2$

P3.- **El prometido.**

a) Sea $y : I \to \mathbb{R}$ diferenciable que satisface la siguiente desigualdad

$$y'(t) \leq a(t)y(t)$$

para todo $t \in I$, con $a : I \to \mathbb{R}$ una función continua. Demuestre que:

$$(y(t)e^{-\int a(t)dt})' \leq 0$$

b) Sean $y_1, y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones diferenciales que satisfacen $y_1(0) \leq y_2(0)$ y

$$y_1' - \alpha(t)y_1 \leq y_2' - \alpha(t)y_2$$

para $t \geq 0$, con $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Pruebe que $y_1(t) \leq y_2(t)$ para $t \geq 0$.

c) Considere las siguientes EDO's lineales

$$y' + ay = b_1(x) \tag{1}$$

$$y' + ay = b_2(x) \tag{2}$$

con $a > 0$ y $b_1, b_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|b_1(x) - b_2(x)| < \varepsilon$ para todo $x \geq x_0$ y para un cierto $\varepsilon > 0$. Sean y_1, y_2 soluciones de (1) y (2) respectivamente con igual condición inicial $y_1(x_0) = y_2(x_0)$.
Demuestre que

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq \frac{\varepsilon}{a}|1 - e^{-a(x-x_0)}| \quad \forall x \geq x_0$$

Resumen

Def. 1 (EDO lineal): Una *EDO lineal de orden n* es de la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = Q(x),$$

donde las funciones $a_i(x)$ son llamadas coeficientes de la EDO.
En el siguiente cuadro se resumen algunas características de las EDO's lineales.

n	orden de la EDO
$Q(x) = 0$	homogénea
$Q(x) \neq 0$	no homogénea
$\forall i,\ a_i = cte$	coeficientes constantes
$\exists i,\ a_i = a_i(x)$	coeficientes variables
$a_n = 1$	normalizada

CUADRO 1. Clasificación de la EDO lineal $\sum_{i=0}^{n} a_i(x)y^{(i)} = Q(x)$.

Def. 2 (Solución de una EDO): Cualquier función φ, definida en un intervalo I y que tiene al menos n deriva- das continuas en I, las cuales cuando se sustituyen en una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden reducen la ecuación a una identidad, se dice que es una solución de la ecuación en el intervalo.
TFC: Sea f integrable en $[a, b]$, entonces, dado $x_0 \in [a, b] e\ y_0 \in \mathbb{R}$, la función y, definida por

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s)ds, \quad \text{para} \quad x \in [a, b],$$

es continua en $[a, b]$ y se tiene $y(x_0) = y_0$. Si además f es continua en $[a, b]$ entonces la función $y(x)$ es también derivable en $[a, b]$ con derivada continua igual a $f(x)$, esto es, se tiene que

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} y'(s)ds, \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(s)ds = f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Las identidades anteriores serán especialmente útiles en este y los próximos capítulos por lo que se sugiere al lector recordarlas siempre, teniendo especial cuidado en no confundir.
Def. (Factor integrante): Definimos el factor

$$\mu(x) = \exp\left(\int \bar{a}_0(x)dx\right)$$

Ecuación de Bernoulli. La ecuación de Bernoulli es de la forma

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \quad \text{con } n \neq 0, n \neq 1.$$

Se realiza el cambio de variable $z = y^{1-n} \Rightarrow z' = (1-n)y^{-n}y'$. Multiplicando $(1-n)y^{-n}$ a ambos lados de la ecuación, queda

$$\begin{aligned}(1-n)y^{-n}y' + p(x)(1-n)y^{1-n} \&= (1-n)q(x)\\ z' + p(x)(1-n)z \&= (1-n)q(x)\end{aligned}$$

que resulta ser una ecuación lineal no homogénea de primer orden normalizada.