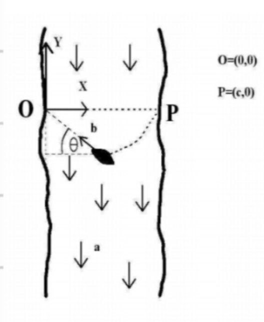
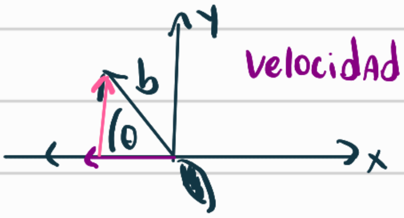
Ejemplo 1.16 (Curva de persecución). Sobre un río, en la posición $P = (c, 0)$, un bote trata de alcanzar la orilla situada en la posición $O = (0, 0)$ como se muestra en la Figura 1.16. Se quiere caracterizar la posición en el eje OY con respecto a la posición en el eje OX. La rapidez de la corriente del río es a en dirección $(0, -1)$. La rapidez del bote es b en dirección $(-\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ donde $\theta = \theta(t)$ va variando en el tiempo de manera que este vector apunta siempre hacia O. Si las coordenadas del bote en un tiempo dado son $B = (x, -y)$, la rapidez en cada eje esta dada por



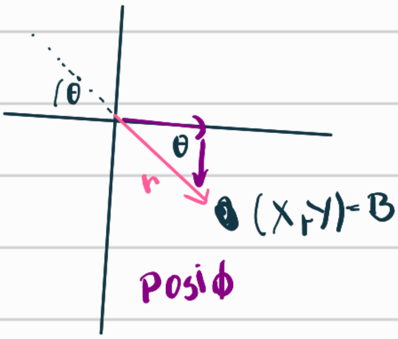
a. Determiene las ecs. de velocidad en los ejes x e Y (sin usar coordenadas polares.



Notamos entonces que podemos escribir la velocidao como:

$$\underbrace{\dot{x}}_{\frac{dx}{dt}} = -b\cos\underbrace{\theta}_{\theta(t)}, \quad \dot{Y} = b\sin(\theta) - a$$

Recordamos además que



$X = r\cos\theta$

$Y = -r\sin\theta$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Con esto, obtenemos que:

$$\cos\theta = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}, \quad \sin(\theta) = \frac{-Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}$$

Usando la regla de la cadena, tenemos que

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dY}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} \Leftrightarrow b\sin\theta - a = \frac{dY}{dx}(-b\cos\theta)$$

$$\Leftrightarrow Y' = \frac{dY}{dx} = \frac{b\frac{Y}{\sqrt{x^2+Y^2}} + a}{b\frac{X}{\sqrt{x^2+Y^2}}} = \frac{bY + a\sqrt{x^2+Y^2}}{\sqrt{\cancel{x^2+Y^2}}}\cdot\frac{\sqrt{\cancel{x^2+Y^2}}}{bx}$$

$$= \frac{bY + \sqrt{x^2+Y^2}\,a}{bx} \quad (\heartsuit)$$

HINT.
Hacemos el cambio de variable $z = y/x$

$\Rightarrow$ $y' = xz' + \underbrace{x'}_{dx/dx} z = xz' + z$

Volviendo a (♡) tenemos:

$$y' = xz' + \cancel{z} = \cancel{z} + \frac{a}{b}\sqrt{1+z^2}, \quad x \neq 0, y \neq 0!$$

Luego, nos queda la ec.

$$z' = \frac{a}{bx}\sqrt{1+z^2}$$

$$\boxed{\frac{z'}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{a}{bx}}$$

b. Resuelva la EDO:

$$\frac{z'}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{a}{bx} \quad \Big/ \int$$

$$\underbrace{\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}}_{♡} = \int \frac{a}{bx}\,dx = \frac{a}{b}\ln(x) + C$$

♡ $z = \tan(u)$, $u = \arctan(z)$, $dz = \sec^2(u)\,du$

Podemos escribir:

$$\int \frac{\sec^2(u)\,du}{\sqrt{1+\tan^2(u)}} \qquad [\tan^2(u) + 1 = \sec^2(u)]$$

$$\Leftrightarrow \int \sec(u)\,du = \int \sec(u)\frac{(\tan(u)+\sec(u))}{\tan(u)+\sec(u)}\,du$$

$v = \tan(u) + \sec(u)$

$dv = \sec(u)\tan(u) + \sec^2(u)\,du$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dv}{v} = \ln(|v|) + C$$

$$\Rightarrow \ln(|\tan(u) + \sec(u)|) + c$$
$$\Rightarrow \ln(|z + \sec(\arctan(z))|) + c$$
$$\Rightarrow \ln(|z + \sqrt{z^2+1}|) + c \quad \hookrightarrow \sec(\arctan(z)) = \sqrt{z^2+1}$$
$$\therefore \int \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}} = \ln(|z + \sqrt{z^2+1}|) + c$$

Volviendo a la EDO:

$$\ln(|\underbrace{z}_{>0} + \underbrace{\sqrt{1+z^2}}_{>0}|) = \frac{a}{b}\ln(x) + c \; / e$$
$$\Leftrightarrow z + \sqrt{1+z^2} = Kx^{a/b}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{1+z^2} = Kx^{a/b} - z \; / (\;)^2$$
$$\underbrace{1+\cancel{z^2}}_{>0} = K^2x^{2(a/b)} - 2Kx^{a/b}z + \cancel{z^2}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{K^2x^{2(a/b)} - 1}{2Kx^{a/b}}$$

Desaciendo el cambio de variabe

$$y = \frac{x}{2}\left(K^2x^{2(a/b)} - \frac{1}{K}x^{-a/b}\right) \quad //$$

Veamos cuanto vale K, usando la condić $y(c) = 0$

$$y(c) = \frac{c}{2}\left(K^2c^{2(a/b)} - \frac{1}{K}c^{-a/b}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow K^3c^{2(a/b)} - c^{-a/b} = 0 \quad / \cdot c^{a/b}$$
$$\Leftrightarrow K^3c^{3(a/b)} = 1$$
$$\Leftrightarrow K = \left(\frac{1}{c}\right)^{a/b} \quad // \quad \checkmark\checkmark$$

P2| a. $y^{-1}y' + \sin(x)e^{\cos(x)}y = 0$

1. Normalizar : El término y' debe quedar solito en la mayoría (o todos los que conozco) de los casos.

$$y^{-1}y' + \sin(x)e^{\cos(x)}y = 0 \quad / \cdot y$$
$$y' + \sin(x)e^{\cos(x)}y^2 = 0$$

⇝ Es una EDO Bernoulli con $n=2$.

Definimos los cambios de variable con

$$z = y^{1-n} = y^{1-2} = y^{-1}$$
$$z' = -y^{-2}y'$$

Multiplicamos la ec. por $-y^{-2}$ $(1-n)y^{-n}$:

$$-y^{-2}y' - \sin(x)e^{\cos(x)}y^2 \cdot y^{-2} = 0$$
$$z' = -\sin(x)e^{\cos(x)} \quad / \int$$

$$z = \underbrace{-\int \sin(x)e^{\cos(x)}dx}_{♡}$$

♡ : $u = \cos(x)$, $du = -\sin(x)\,dx$

$$\int e^u du = e^u + C$$

$$\therefore z = e^{\cos(x)} + C \quad //$$

b. $y' + 3x^2y = x^2$

EDO lineal no homogénea.

$$\mu = e^{\int 3x^2 dx} = e^{x^3}$$

Multiplicamos la ec.

$$e^{x^3}y' + e^{x^3} \cdot 3x^2y = x^2e^{x^3}$$
$$(e^{x^3}y)' = x^2e^{x^3} \quad / \int$$

$$e^{x^3}y = \left.\int x^2 e^{x^3}\,dx\right\}(\heartsuit)$$

$\heartsuit$: $u = x^3$, $du = 3x^2$

$$\frac{1}{3}\int e^u\,du = \frac{e^u}{3}$$

$$\therefore \quad \heartsuit = \frac{e^{x^3}}{3} + c$$

$$y = \frac{1}{3} + c\,e^{-x^3} \quad //$$

(c) $xy' + y = \dfrac{1}{y^2} \quad / \cdot \dfrac{1}{x}$

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{y^{-2}}{x}$$ ⇝ EDO de Bernoulli con $n = -2$

$z = y^{1-(-2)} = y^3$, $z' = 3y^2y'$

Multiplicando la ec. nos queda

$$3y^2y' + 3\frac{y^3}{x} = \frac{3}{x}$$

$$z' + 3\frac{z}{x} = \frac{3}{x}$$ ⇝ EDO lineal no homogénea

Resolvemos con factor integrante

$$\mu = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln(x)} = e^{\ln(x^3)} = x^3$$

Luego:

$$z'x^3 + 3zx^2 = 3x^2$$

$$(zx^3)' = 3x^2 \quad / \int$$

$$zx^3 = \int 3x^2\,dx = \frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}} + c$$

$\Leftrightarrow \quad z = 1 + \frac{c}{x^3}$

Desaciendo el cambio de variables nos queda:

$$y^3 = 1 + \frac{c}{x^3}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \sqrt[3]{1 + \frac{c}{x^3}}$$

d) $y' = \frac{6x - 4y}{x - y}$

Usamos el cambio de variable

$$z = \frac{y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad y = zx \Rightarrow y' = z'x + z$$

De esto, nos queda:

$$z'x + z = \frac{\cancel{x}(6 - 4z)}{\cancel{x}(1 - z)}$$

$$z'x = \frac{6 - 4z}{1 - z} - z$$

$$z' \left[\frac{1 - z}{6 - 4z - (1 - z)z} \right] = \frac{1}{x}$$

$$z' \left[\frac{1 - z}{6 - 4z - z + z^2} \right] = \frac{1}{x}$$

$$z' \left[\frac{1 - z}{\underbrace{z^2 - 5z + 6}_{\text{fórmula}}} \right] = \frac{1}{x}$$

$$z_1, z_2 = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}, \quad z_1 = 3, \quad z_2 = 2$$

$$z' \left[\frac{1 - z}{(z - 3)(z - 2)} \right] = \frac{1}{x} \quad //$$

$\heartsuit \quad \dfrac{1-z}{(z-3)(z-2)} = \dfrac{A}{(z-3)} + \dfrac{B}{(z-2)} \quad \Big/ \cdot (z-3)(z-2)$

$$1-z = Az-2A+Bz-3B$$
$$= z(A+b) - 2A - 3B$$

$\cdot \; A+B=-1 \iff A = -(B+1)$

$\cdot \; -2A-3B = 1 \iff 2B+2-3B=1$

$\iff -B=-1$

$\iff B=1 \iff A=-2$

$$\heartsuit = \int \frac{-2}{z-3}\,dz + \int \frac{dz}{z-2}$$
$$= -2\ln(z-3) + \ln(z-2) = \ln\left(\frac{z-2}{(z-3)^2}\right)$$

Volviendo a la ec.

$$\ln\left(\frac{z-2}{(z-3)^2}\right) = \ln(x) + c \quad \Big/ \, e$$

$$\frac{z-2}{(z-3)^2} = xK$$

$$z-2 = xK(z^2-6z+9$$
$$z-2 = xKz^2 - xK6z + 9xK$$
$$\iff 0 = xKz^2 - (xK6+1)z + 9xK+2$$

$$z = \frac{xK6+1 \pm \sqrt{x^2K^2\cancel{36} + 12xK + 1 - \cancel{36}x^2K^2 - 8Kx}}{2xK}$$

$$= \frac{6Kx+1 \pm \sqrt{4xK+1}}{2xK}$$

Desacemos el cambio de variable.

$$\frac{y}{\cancel{x}} = \frac{6Kx+1 \pm \sqrt{4xK+1}}{2\cancel{x}K}$$

$$\therefore\ Y = \frac{6KX + 1 \pm \sqrt{4XK+1}}{2K}$$

e) $YY'' = (Y')^2$

Usamos el cambio de variable $u = Y' \Rightarrow \frac{du}{dx} = Y''$

Luego, nos queda

$$Y \underbrace{\left(\frac{du}{dx}\right)}_{(1)} = u^2$$

$$\rightsquigarrow \frac{du}{dx} = \frac{du}{dY} \cdot \underbrace{\frac{dY}{dx}}_{u}$$ $\rightsquigarrow$ regla de la cadena

De esta forma la ec. nos queda:

$$Y \frac{du}{dY} \cdot u = u^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{du}{u} = \frac{dY}{Y}$$ $\rightsquigarrow$ variables separables.

$$\Leftrightarrow \quad \ln(u) + c = \ln(Y) \quad / e^{\,''}$$

$$\Leftrightarrow \quad uK = Y$$

Sacando el cambio de variable tenemos:

$$\frac{dY}{dx} K = Y$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dY}{Y} = \frac{dx}{K} \quad / \int$$

$$\ln(Y) = \frac{x}{K} + c \quad / e$$

$$Y = \bar{K} e^{x/K} \quad //$$

P3

a) Sea $y : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ diferenciable que satisface la siguiente desigualdad

$$y'(t) \leq a(t)y(t) \quad (\geq a(t)y(t))$$

para todo $t \in \mathbb{I}$, con $a : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ una función continua.
Demuestre que $(y(t)e^{-\int a(t)dt})' \leq 0$ (≥ 0).

$$Y'(t) \leq a(t)Y(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad Y'(t) - a(t)Y(t) \leq 0 \quad / \; e^{-\int a(s)ds} = u$$

$\rightarrow a(t)$ es continua
Tiene primitiva

$$\Leftrightarrow \quad Y'(t)u(t) - a(t)Y(t)u \leq 0$$

$$(Y(t)u)' \leq 0 \quad //$$

b) Sean $y_1, y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciales que satisfacen $y_1(0) \leq y_2(0)$ y

$$y_1' - \alpha(t)y_1 \leq y_2' - \alpha(t)y_2$$

para $t \geq 0$, con $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Pruebe que $y_1(t) \leq y_2(t)$ para $t \geq 0$.

$$Y_1' - \alpha(t)Y_1 \leq Y_2' - \alpha(t)Y_2$$

$$\Leftrightarrow \quad Y_1' - Y_2' \leq \alpha(t)(Y_1 - Y_2)$$

Denotamos: $Z = Y_1 - Y_2$

$$Z' = Y_1' - Y_2'$$

Y tenemos:

$$Z' \leq \alpha(t)Z$$

Como α es continua tenemos que podemos escribir esta ec. como en la parte (a)

$$Z'(t) - \alpha(t)Z \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad (Z(t)u)' \leq 0, \quad u = e^{-\int \alpha(s)ds}$$

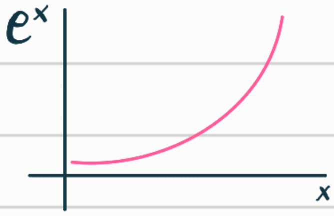
De aquí, podemos resolver:

$$(Z(t)u(t))' \leq 0 \quad / \int$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^t (Z(t)u(t))' dt \leq 0$$

TFC

$$\Leftrightarrow \ z(t)\mu - z(0)\mu \le 0$$



$$\Leftrightarrow \ z(t)\underbrace{e^{-\int a(s)ds}}_{>0} \underbrace{-\underbrace{z(0)\, \underbrace{e^{\overbrace{-\int a(s)ds}^{\text{"x"}}}}_{>0}}_{<0}}_{>0} \le 0$$

Recordamos que $z(0) = y_1(0) - y_2(0)$ y por enunciado $y_1(0) \le y_2(0) \Rightarrow z(0) \le 0$

$$\therefore \ z(t) \le 0 \quad \forall t > 0$$

$$\Leftrightarrow \ y_1(t) - y_2(t) \le 0 \quad \forall t > 0$$

$$\Leftrightarrow \ y_1(t) \le y_2(t) \quad \forall t > 0 \ //$$

Considere las siguientes EDO lineales

$$y' + ay = b_1(x) \tag{1}$$
$$y' + ay = b_2(x) \tag{2}$$

con $a > 0$ y $b_1, b_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas tal que $|b_1(x) - b_2(x)| < \epsilon$ para todo $x \ge x_0$ y para un cierto $\epsilon > 0$. Sean y_1, y_2 soluciones de (1) y (2) respectivamente con igual condición inicial $y_1(x_0) = y_2(x_0)$. Demuestre que

$$|y_1(x) - y_2(x)| \le \frac{\epsilon}{a}|1 - e^{-a(x-x_0)}| \ \forall x \ge x_0$$

- $y' + ay = b_1(x) \quad / \ e^{\int a\,dx} = e^{ax}$

$$y'e^{ax} + ae^{ax}y = b_1(x)e^{ax}$$

$$(ye^{ax})' = b_1(x)e^{ax} \quad / \int_{x_0}^{x}$$

$$y(x)e^{ax} - y(x_0)e^{ax_0} = \int_{x_0}^{x} b_1(t)e^{at}\,dt$$

$$y_1 = \int_{x_0}^{x} b_1(t)e^{-a(x-t)}\,dt + y_1(x_0)e^{a(x_0-x)}$$

De forma análoga:

$$y_2 = \int_{x_0}^{x} b_2(t)e^{-a(x-t)}\,dt + y_2(x_0)e^{a(x_0-x)}$$

$$\therefore \ |y_1(x) - y_2(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} (b_1(t) - b_2(t))e^{-a(x-t)}\,dt\right|$$

$$\le \varepsilon \int_{x_0}^{x} e^{-a(x-t)}\,dt = \varepsilon\, e^{-ax}\int_{x_0}^{x} e^{at}\,dt$$

$$= \varepsilon\left(\frac{e^{-ax}}{a}\left(e^{ax} - e^{ax_0}\right)\right) \le \frac{\varepsilon}{a}|1 - e^{-a(x-x_0)}| \ //$$