Ejercicio 1: Usamos que $v(t) = \frac{dx}{dt}$ para escribir

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\gamma}{m} v^2$$

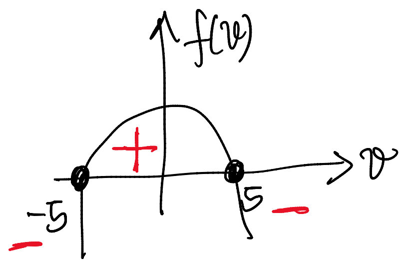
y empleando los datos: $g=10$, $\frac{\gamma}{m} = \frac{36}{90} = \frac{2}{5}$, luego

$$\frac{dv}{dt} = 10 - \frac{2}{5}v^2 = \frac{2}{5}(25-v^2) = \frac{2}{5}(5-v)(5+v)$$

(a) Las soluciones estacionárias/constantes del problema son $v = \pm 5$, que son las raíces del polinómio cuadrático

$$f(v) = 10 - \frac{2}{5}v^2.$$

Además, una vez que la gráfica de $f$ es una parábola cóncava (es decir, con concavidad voltada para abajo), el signo de $f$ es determinado de la siguiente forma:




$$\begin{cases} f(v) > 0 & \text{si } v \in (-5,5) \\ f(v) < 0 & \text{si } v \in (-\infty,-5) \cup (5,+\infty) \end{cases}$$

y por lo tanto:

I Si $v \in (-\infty,-5)$, $\frac{dv}{dt} = f(v) = \frac{2}{5}(5-v)(5+v) < 0$, lo que significa que una solución que pasa por $v(0) = v_0$ con $v_0 < -5$ es decreciente.

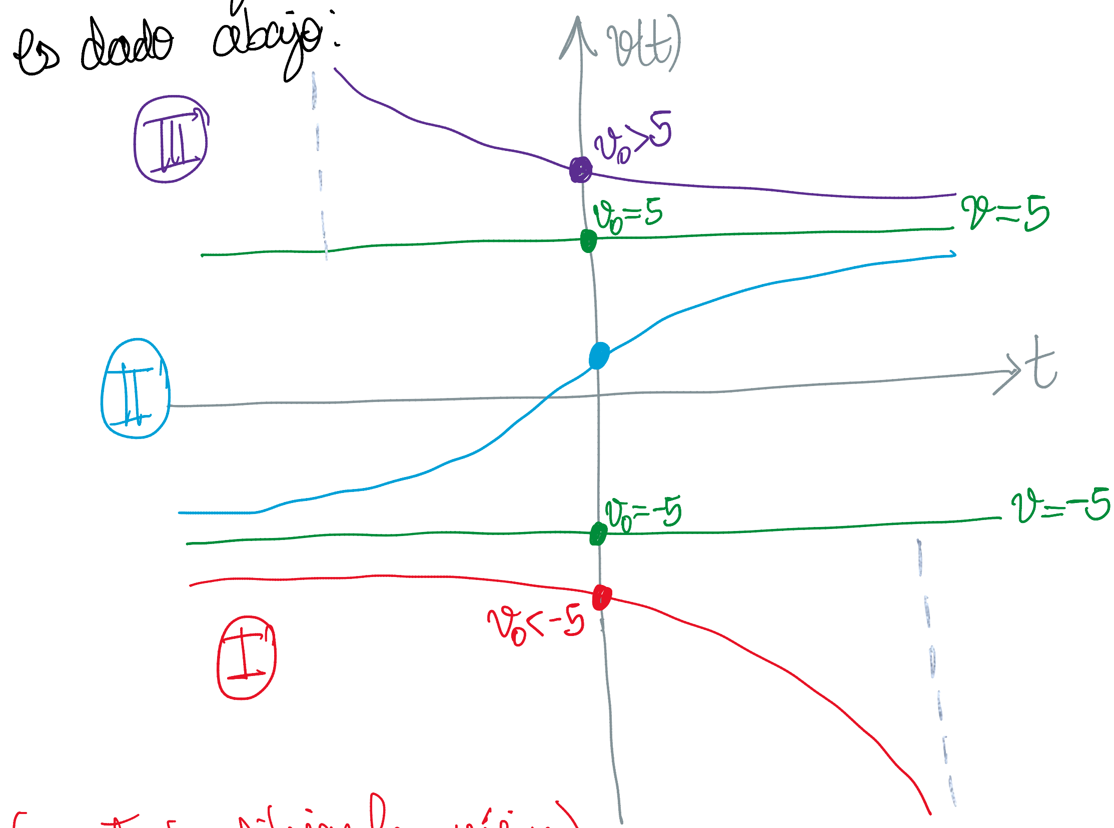
Si $v \in (-5,5)$, $\frac{dv}{dt} = f(v) = \frac{2}{5}(5-v)(5+v) > 0$, entonces una solución que pasa por $v(0) = v_0$ con $v_0 \in (-5,5)$ es creciente.

una solución que pasa por $v(0)=v_0$ con $v_0 \in (-5,5)$ es creciente.

III Si $v \in (5,+\infty)$, $\frac{dv}{dt} = f(v) = \frac{2}{5}(5-v)(5+v) < 0$, y una solución con $v(0) = v_0 > 5$ es decreciente.

Obviamente, si $v(0) = v_0 = 5$ o $v(0) = v_0 = -5$, entonces las soluciones respectivas son constantes.

El dibujo de una posible solución para cada uno de esos casos es dado abajo:




(2 puntos por dibujar las gráficas)

(b) En este ejercicio, usaremos el método de variables separables. Suponga que $v \neq \pm 5$, y que por lo tanto estamos en alguna de las regiones I, II o III del plano $(t, v(t))$. El método consiste en separar las variables e integrar ambos lados:

regiones ①, ② e integrar ambos lados.
en separar las variables e integrar ambos lados.

$$\int \frac{dv}{(5+v)(5-v)} = \int \frac{2}{5}\,dt \qquad (*)$$

Escribimos $\dfrac{1}{(5+v)(5-v)} = \dfrac{A}{5+v} + \dfrac{B}{5-v}$ en fracciones parciales

con $A, B$ a determinar, es decir,

$$\frac{1}{(5+v)(5-v)} = \frac{A(5-v)+B(5+v)}{(5+v)(5-v)} = \frac{\overbrace{5A+5B}^{=1}\overbrace{-Av+Bv}^{=0}}{(5+v)(5-v)}$$

y por lo tanto, al igualar los coeficientes descubrimos que

$$\begin{cases} 5(A+B)=1 \\ -A+B=0 \Rightarrow \boxed{A=B} \end{cases} \Rightarrow 2A = A+B = \frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{A=\frac{1}{10}}$$

de donde $\dfrac{1}{(5+v)(5-v)} = \dfrac{1}{10}\left\{\dfrac{1}{5+v} + \dfrac{1}{5-v}\right\}$.

Aplicando esta última identidad en (*), tenemos (recuerde que $v \neq \pm 5$):

$$\frac{1}{10}\left\{\ln|5+v| - \ln|5-v|\right\} = \frac{2}{5}t + C$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left|\frac{5+v}{5-v}\right| = 4t + 10C$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{5+v}{5-v}\right| = e^{4t}e^{10C}$$

Como estamos en alguna de las regiones (I), (II) o (III), ambas funciones $5+v$ y $5-v$ poseen signo, específicamente

$$\left|\frac{5+v}{5-v}\right| = \begin{cases} \dfrac{5+v}{5-v} & \text{en (II)} \end{cases}$$

$$\left|\frac{5+v}{5-v}\right| = \begin{cases} \frac{5+v}{5-v} & \text{en (II)} \\ \frac{5+v}{v-5} & \text{en (I) o (III)} \end{cases}$$

O sea,

$$\left|\frac{5+v}{5-v}\right| = \pm \frac{5+v}{5-v},$$

y por lo tanto

$$\frac{5+v}{5-v} = Ke^{4t}, \text{ donde } K = \pm e^{10C}.$$

$$\Rightarrow 5+v = (5-v)Ke^{4t} = 5Ke^{4t} - Ke^{4t}v$$

$$\Rightarrow v(1+Ke^{4t}) = 5Ke^{4t} - 5$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{5(Ke^{4t}-1)}{1+Ke^{4t}}$$ → solución general (G) $(\neq 0)$

Obs.1: Recuerda que (*) es justificado vía:

$$\frac{1}{10}\frac{d}{dt}\left(\ln|v+5| - \ln|5-v|\right) = \frac{1}{10}\left\{\frac{1}{v+5} - \frac{1}{5-v}\right\}\frac{dv}{dt} = \frac{\frac{dv}{dt}}{(v+5)(v-5)} = \frac{2}{5}$$

de donde, ahora, se integra en ambos lados con respecto a $t$.

Obs.2: La ecuación $\frac{dv}{dt} = 10 - \frac{2}{5}v^2$ también puede ser vista como una ecuación de Riccati, vía $v = v_1 + u$, donde $v_1$ es una solución particular conocida de la ecuación (por ejemplo $v_1 = 5$), y $u$ es una solución de la ecuación homogénea asociada (o sea, de la ecuación de Bernoulli $\frac{dv}{dt} = -\frac{2}{5}v^2$), vea clase auxiliar 3.

Ejercicios adicionales: (A) PVI: Escribimos $K$ en términos de $v_0$:

Explicaciones adicionales: 1) PVI: Escribimos K en terminos de $v_0$:

$$v_0 = v(0) = 5\frac{(K-1)}{1+K}, \quad K \neq -1$$

$$\Rightarrow v_0 + K v_0 = 5K - 5$$

$$\Rightarrow v_0 + 5 = K(5 - v_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{K = \frac{v_0+5}{5-v_0}}, \text{ si } v_0 \neq 5.$$

Luego, la expresión general de $v$ en terminos de $v_0$ es dada por:

$$v(t) = \frac{5\left(\frac{v_0+5}{5-v_0}e^{4t} - 1\right)}{1 + \frac{v_0+5}{5-v_0}e^{4t}} \quad \text{si } v_0 \neq 5$$

→ la solución $v(t)$ que pasa por el punto $v(0) = v_0$ es única porque $f(v)$ es localmente Lipschitz en $v$, por el Teorema Existencia y unicidad general

(claro que $v(t) = 5 \ \forall t \in \mathbb{R}$ si $v_0 = 5$)

2) Velocidad Terminal: es dada por

$$v_\infty = \lim_{t \to +\infty} v(t)$$

siempre que este límite está bien definido (o sea, siempre que las soluciones estén definidas para $t$ arbitrariamente grande.

La solución general (G) del ítem (b) tiene una singularidad $T$ si y solo si:

$$1 + Ke^{4T} = 0 \iff K = -e^{-T} < 0, \quad \text{(S)}$$

si y sólo si (5) $1+Ke^{\cdot}=0 \iff K=$ ...

y $K=\frac{v_0+5}{5-v_0}<0$ sólo ocurre si $v_0<-5$ o $v_0>5$,

o sea, si estamos en las regiones (I) o (III).

## (3) Singularidades:

$$1+Ke^{4T}=0 \iff e^{4T}=-\frac{1}{K}, \quad K<0$$

$$\iff 4T=\ln\left(-\frac{1}{K}\right)$$

$$\iff T=\frac{\ln\left(-1/K\right)}{4}$$

Así que:

- Si estamos en la región (I), donde $v<-5$, entonces $v_0<-5$ y así

$$-\frac{1}{K}=\frac{5-v_0}{-(v_0+5)}=\frac{-5-v_0+10}{-v_0-5}=1+\underbrace{\frac{10}{-(v_0+5)}}_{>0}>1$$

y por lo tanto en este caso la singularidad $T$ es un número positivo, es decir, $T>0$, de donde $\nexists \lim\limits_{t\to+\infty} v(t)$ si $(t,v(t))$ pertenece a la región (I).

- Si estamos en la región (III), donde $v>5$, entonces $v_0>5$ y

$$-\frac{1}{K}=\frac{v_0-5}{v_0+5}=\frac{v_0+5-10}{v_0+5}=1-\underbrace{\frac{10}{v_0+5}}_{>0}<1$$

y entonces en este caso la singularidad $T$ es un número negativo, $T<0$, de donde $\nexists \lim\limits_{t\to-\infty} v(t)$ si $(t,v(t))$ pertenece a la región (III).

(región III).

[C.1) Si $v(0)=v_0>0$ entonces estamos en las regiones (III) o (I), donde donde sí las soluciones están definidas $\forall t>0$, luego, de (G), calculamos la velocidad terminal:

$$v_\infty = \lim_{t\to+\infty} v(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{5(Ke^{4t}-1)}{1+Ke^{4t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{5(K-e^{-4t})}{e^{-4t}+K} =$$

$$= \frac{5K}{K} = 5$$

[C.2) Si $v(0)=v_0$ es suficientemente negativa, como por ejemplo cualquier valor $v_0<-5$, entonces eso significa que nuestro súper heroe favorito ha tomado un impulso para arriba (dirección negativa). Eso corresponde a una velocidad descrita como en la (III), y por lo tanto $v(t) \xrightarrow[t\to T]{} -\infty$, o sea, $v(t)$ explota en tiempo finito $T$.

En particular, nuestro súper heroe favorito se va al espacio y no vuelve más.

*Obs.: $v=-5$ es conocida como velocidad de escape.

Ejercicio 2: Empezamos por escribir la ecuación en su forma normalizada:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{2t^3}{t^4-16}y = \frac{2t}{t^4-16} \quad \text{si } t \neq \pm 2 \qquad (1)$$

Encontramos su factor integrante:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2t^3}{t^4-16}dt} = e^{\frac{1}{2}\int \frac{4t^3 dt}{t^4-16}} = e^{\frac{1}{2}\int \frac{d(t^4-16)}{t^4-16}} = e^{\frac{1}{2}\ln|t^4-16|}$$

$$= e^{\ln|t^4-16|^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{|t^4-16|} = \begin{cases} \sqrt{t^4-16} & \text{si } t \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty) \\ \sqrt{16-t^4} & \text{si } t \in (-2,2) \end{cases}$$

Ahora, como la solución del PVI pasa por el punto $t=0$, vamos a considerar el intervalo $(-2,2)$, de donde obtenemos:

$$\mu(t) = \sqrt{16-t^4}, \quad \forall t \in (-2,2).$$

(Hasta acá 1 punto: encontrar el f.I correctamente)

A seguir, multiplicamos ambos lados de la ecuación (1) por $\mu(t)$:

$$\left(\sqrt{16-t^4}\,y\right)' = \sqrt{16-t^4}\,y' - \frac{2t^3 y}{\sqrt{16-t^4}} = \sqrt{16-t^4}\left(y' + \frac{2t^3}{t^4-16}\right)$$

$$= -2t\frac{\sqrt{16-t^4}}{16-t^4} = -\frac{2t}{\sqrt{16-t^4}} = g(t)$$

(+1 punto por multiplicar por el f.I.)

Como la función $g(t)$ en el lado derecho de la ecuación arriba es continua en el intervalo $(-2,2)$, podemos emplear el TFC para obtener:

$$\sqrt{16-t^4}\,y(t) = \sqrt{16}\,y(0) + \int_0^t g(s)ds = 4y(0) + \int_0^t g(s)ds,$$

$$\forall t \in (-2,2)$$

$$\sqrt{16-t^4}\, y(t) = \sqrt{16}\, y(0) + \int_0 \cdots \qquad \forall t \in (-2,2)$$

(+ 1 punto por utilizar bien el TFC)

Notamos que

$$g(s) = \frac{2s}{\sqrt{16\left(1-\frac{s^4}{16}\right)}} = \frac{2s}{4\sqrt{1-\left(\frac{s^2}{4}\right)^2}}$$

y luego

$$\int_0^t g(s)\,ds = \int_0^t \frac{\frac{2s}{4}\,ds}{\sqrt{1-\left(\frac{s^2}{4}\right)^2}} = \int_0^{\frac{t^2}{4}} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \;\textcircled{=}$$

$$u = \frac{s^2}{4} \Rightarrow du = \frac{2s}{4}\,ds$$

$$s \in (0,t) \Leftrightarrow u = \frac{s^2}{4} \in \left(0, \frac{t^2}{4}\right)$$

$$\textcircled{=}\; \arcsin\left(\frac{t^2}{4}\right) - \underbrace{\arcsin(0)}_{=0} = \arcsin\left(\frac{t^2}{4}\right)$$

(+ 1 punto por resolver la integral)

Y por lo tanto, usando que $y(0)=1$, tenemos:

$$\sqrt{16-t^4}\; y(t) = 4 + \arcsin\left(\frac{t^2}{4}\right), \quad \forall t \in (-2,2)$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \frac{4+\arcsin\left(\frac{t^2}{4}\right)}{\sqrt{16-t^4}}, \quad \forall t \in (-2,2). \qquad (2)$$

(+ 1 punto por la expresión)

(+1 punto por la expresión)

Esto prueba la existencia y por construcción, toda solución de (1) en el intervalo $(-2,2)$ satisface la expresión (2).

Unicidad: Sean $y_1, y_2$ dos soluciones de (1) que satisfacen

$$y_1(0) = y_2(0) = 1.$$

Como $y_1, y_2$ satisfacen la fórmula (2), entonces

$$y_1(t) = y_2(t) \quad , \forall t \in (-2,2).$$

(+1 punto por la unicidad)

Ejercicio 3: (2 puntos por cada)

(a) $y^{\frac{1}{2}} \dfrac{dy}{dx} + 2y^{\frac{3}{2}} = xe^{-2x} \overset{\substack{si \\ y \neq 0}}{\Rightarrow} \boxed{\dfrac{dy}{dx} + 2y = xe^{-2x} y^{-\frac{1}{2}}}$ (3)

↳ Bernoulli $n = -\frac{1}{2}$

Definimos

$$u = y^{1-n} = y^{1+\frac{1}{2}} = y^{\frac{3}{2}}$$

Entonces

$$\underbrace{\frac{du}{dx} = \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx}}_{(1)} \quad , \text{además} \quad u = y\, y^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \underbrace{y = u y^{-\frac{1}{2}}}_{(2)}$$

Sustituyendo (1) y (2) en la ecuación (3), obtenemos:

Sustituyendo (1) y (2) en la ecuación (3), obtenemos:

$$\frac{2}{3}\cancel{y^{-\frac{1}{2}}}\frac{du}{dx} + 2u\cancel{y^{-\frac{1}{2}}} = xe^{-2x}\cancel{y^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\frac{du}{dx} + 2u = xe^{-2x} \Rightarrow \frac{du}{dx} + 3u = \frac{3}{2}xe^{-2x}$$

(Cuenta acá 1 punto)

$$(e^{3x}u)' = \left(\frac{du}{dx} + 3u\right)e^{3x} = \frac{3}{2}xe^{-2x}e^{3x} = \frac{3}{2}xe^{x}$$

$$\Rightarrow e^{3x}u = \frac{3}{2}\int xe^{x}\,dx = \frac{3}{2}\left\{xe^{x} - e^{x}\right\} + C$$

Integración por partes: $\int U\,dV = UV - \int V\,dU$

$U = x,\ dV = e^{x}dx \Rightarrow V = e^{x}$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{3}{2}e^{-3x}\left\{xe^{x} - e^{x}\right\} + Ce^{-3x} = \frac{3}{2}e^{-2x}(x-1) + Ce^{-3x}$$

(+0,5)

Finalmente, usando que $u = y^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow y = u^{\frac{2}{3}}$, tenemos

$$y(x) = \left(\frac{3}{2}e^{-2x}(x-1) + Ce^{-3x}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

(+0,5)

(b) $yy'' = 3(y')^2$

Definimos $\boxed{z = y'}$, entonces $y'' = z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}z$

Definimos $\boxed{z=y'}$, entonces $y'' = \ldots$ $dx$ $dy$ $dx$ $dy$

y luego,

Si $y, z \neq 0$

$$y \frac{dz}{dy} z = 3z^2 \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = 3\int \frac{dy}{y} \text{ si } z, y \neq 0.$$

(1 punto)

$$\Rightarrow \ln|z| = 3\ln|y| + C \Rightarrow \ln|z| - \ln|y|^3 = C$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{z}{y^3}\right| = C \Rightarrow \left|\frac{z}{y^3}\right| = e^C$$

$$\Rightarrow \frac{z}{y^3} = \pm e^C = C_1 \text{ si } z, y \neq 0$$

(se recuerde que $z, y$ son continuas y no pasan por 0, luego tienen signo)

$$\Rightarrow z = C_1 y^3 \quad , \quad y \in (0, +\infty) \text{ o } y \in (-\infty, 0).$$
$$C_1 \in \mathbb{R}.$$

(+0,5)

Luego, como $\frac{dy}{dx} = z = C_1 y^3$, tenemos $\int \frac{dy}{y^3} = \int C_1 dx$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} y^{-2} = C_1 x + C_2$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \left(-2C_1 x - 2C_2\right)^{-\frac{1}{2}} \quad , C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

(+0,5)

(c) $x \frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 - y^2}, \quad x > 0$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x\,dy}_{M(x,y)} = \underbrace{\left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right)}_{N(x,y)} dx$$

$\to$ homogénea de grado 1, porque las funciones M y N son homogéneas de grado 1. De hecho,

$$\begin{cases} M(tx, y) = tx \\ N(tx, ty) = ty + t\sqrt{x^2 - y^2} \end{cases}, \forall t > 0.$$

Definimos $\boxed{u = \frac{y}{x}}$, $x > 0$,

$$\begin{cases} M(tx,y) = tx \\ N(tx,ty) = ty + t\sqrt{x^2-y^2} \end{cases}, \forall t>0.$$

Definimos $\boxed{u = \frac{y}{x}}$, $x>0$,

Luego $y = ux$ de donde

$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$. Notamos que (c) se escribe en la forma:

(x>0) $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2}} = \frac{y}{x} + \sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$

Entonces viene:

$$\frac{du}{dx}x + \cancel{u} = \cancel{u} + \sqrt{1-u^2}$$

$$\Rightarrow x\frac{du}{dx} = \sqrt{1-u^2}$$ (hasta acá 1 punto)

$$\Rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \arcsin(u) = \ln x + C, \quad x>0$$

$$\Rightarrow u(x) = \sin(\ln x + C)$$ (+0,5)

Finalmente, usando $y = xu$, $y(x) = x\sin(\ln x + C)$, $x>0$, $C\in\mathbb{R}$

(d) $\frac{dy}{dx} = \sin(x+y)$

Definimos $u = x+y$, entonces $\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$, y por lo tanto

$$\frac{du}{dx} = 1 + \sin u$$ (hasta acá 1 punto)

$$\Rightarrow \int \frac{du}{1+\operatorname{sen} u} = \int dx \Rightarrow \int \frac{(1-\operatorname{sen} u)\,du}{\underbrace{(1+\operatorname{sen} u)(1-\operatorname{sen} u)}_{1-\operatorname{sen}^2 u = \cos^2 u}} = x + C$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int \frac{du}{\cos^2 u}} - \underbrace{\int \frac{\operatorname{sen} u\, du}{\cos^2 u}} = x + C$$

$w = \operatorname{tg} u = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}$

$\Rightarrow dw = \frac{\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u}{\cos^2 u}\, du = \frac{du}{\cos^2 u}$

$\Rightarrow \int \frac{du}{\cos^2 u} = \int dw = w = \operatorname{tg} u$

$v = \cos u$

$dv = -\operatorname{sen} u\, du$

$\Rightarrow \int \frac{-\operatorname{sen} u\, du}{\cos^2 u} = \int \frac{dv}{v^2}$

$= -\frac{1}{v} = \frac{-1}{\cos u}$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} u - \frac{1}{\cos u} = x + C \quad , C \in \mathbb{R}$$

$u = x+y$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(x+y) - \frac{1}{\cos(x+y)} = x + C \quad , C \in \mathbb{R}.$$

(e) $\frac{d^2y}{dx^2} - k^2 y = 0$ : Usemos $\frac{dy}{dx} = y' = z$.

Notamos: $\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z$

Sustituyendo en la ecuación (e), tenemos:

$$\frac{dz}{dy} z = k^2 y \Rightarrow \int z\, dz = \int k^2 y\, dy$$

$$\frac{dz}{dy} z = k^2 y \Rightarrow \int z\,dz = \int k^2 y\,dy$$

$$\Rightarrow \frac{z^2}{2} = \frac{k^2 y^2}{2} + \frac{C}{2} \Rightarrow z^2 = k^2 y^2 + C$$

$$\Rightarrow z = \pm\sqrt{k^2 y^2 + C}$$

(Hasta acá 1,0)

Ahora recordamos que $\frac{dy}{dx} = z$, de dónde

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{k^2y^2+C} \Leftrightarrow \pm\int \frac{dy}{\sqrt{k^2y^2+C}} = \int dx$$

Sea $C>0$ para simplificar y considere el signo de "+".

$$\int \frac{dy}{\sqrt{k^2y^2+C}} = \int \frac{dy}{\sqrt{C\left(\frac{k^2y^2}{C}+1\right)}} = \frac{k}{k\sqrt{C}} \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{ky}{\sqrt{C}}\right)^2+1}} \ominus$$

$$w = \frac{ky}{\sqrt{C}} \Rightarrow dw = \frac{k}{\sqrt{C}}\,dy$$

$$\ominus \frac{1}{k}\int \frac{dw}{\sqrt{w^2+1}} \underset{\downarrow}{\ominus} \frac{1}{k}\operatorname{arcsenh} w = \frac{1}{k}\operatorname{arcsenh}\left(\frac{ky}{\sqrt{C}}\right)$$

$$w = \operatorname{senh} v = \frac{e^v - e^{-v}}{2},\ dw = \cosh v\,dv = \frac{e^v + e^{-v}}{2}\,dv$$

Entonces, $w^2+1 = \frac{1}{4}(e^v - e^{-v})^2 + 1 = \frac{1}{4}(e^{2v} + e^{-2v} - 2) + 1$

$$= \frac{1}{4}(e^{2v} + e^{-2v} + 2) = \frac{1}{4}(e^v + e^{-v})^2 = \cosh^2 v$$

$$\Rightarrow \int \frac{dw}{\sqrt{w^2+1}} = \int \frac{\cosh v\,dv}{\sqrt{\cosh^2 v}} \underset{\downarrow}{=} \int \frac{\cancel{\cosh v}}{\cancel{\cosh v}}\,dv = \int dv = v$$

$\Rightarrow \int \sqrt{w^2+1} \quad \int \sqrt{\cosh \theta} \downarrow \int \cosh$

$\cosh \theta \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{K} \operatorname{arcsenh}\left(\frac{Ky}{\sqrt{C}}\right) = x + \theta_1 \qquad (+0,5)$$

$$\Rightarrow \frac{Ky}{\sqrt{C}} = \operatorname{senh}(Kx + \theta_2) \quad , \quad \theta_2 = K\theta_1$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{\sqrt{C}}{K} \operatorname{senh}(Kx + \theta_2) = C_1 \operatorname{senh}(Kx + \theta_2)$$

$$\text{o} \quad y(x) = C_1 \operatorname{senh}(Kx + \theta_2) \quad , \quad C_1 = \frac{\sqrt{C}}{K}. \qquad (+0,5)$$

Obs: Con el signo de "$-$", obtenemos otra familia de soluciones vía integral de arccosh, o sea,

$$y(x) = C_1 \cosh(Kx + \theta_2).$$