Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2601-6 – Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Auxiliar 1: Introducción

Modelamiento y resolución de EDO's

Profesora: Gabrielle Nornberg
Auxiliares: Iñaki Ramírez, Rocío Yáñez

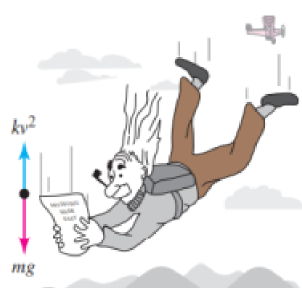
P1.- **Algo para empezar...**
Considere la siguiente ecuación diferencial que describe la posición x(t) respecto al tiempo t de un paracaidista que está cayendo donde

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - \gamma(\frac{dx}{dt})^2$$

m es la masa, γ es la constante de proporcionalidad, y g es la aceleración de la gravedad. Para facilitar, considera m $= 90\ kg$, g $= 10\ m/s^2$, $\gamma = 36\ kg/s$.

1. Haga un análisis cualitativo de la velocidad $v(t)$ con respecto al tiempo para dada velocidad inicial $v(0) = v_0$.

2. Obtenga la expresión general de la velocidad $v(t)$ con respecto al tiempo.



P2.- **1. Resuelva las siguientos EDO's:**

- $x\frac{dx}{dy} = 4y$
- $x^2\frac{dy}{dx} = y - yx, y(-1) = -1$
- $csc(y)dx + sec^2(x)dy = 0$
- $\sqrt{1-y^2}dx - \sqrt{1-x^2}dy = 0, y(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{1-y^2}$
- $(1+x^4)dy + x(1+4y^2)dx = 0, y(1) = 0$

2.Determine una función cuyo cuadrado más el cuadrado de su derivada es igual a 1.

P3.- **Mezclitas.** Suponga que un tanque grande de mezclado contiene inicialmente 300 galones de agua, en los que se han disuelto 50 libras de sal. Otra salmuera introducida al tanque a una razón de 3 gal/min y cuando la solución está bien mezclada sale a una razón lenta de 2 gal/min. Si la concentración de la solución que entra es 2 lb/gal, determine una ecuación diferencial que exprese la cantidad de sal A(t) que hay en el tanque al tiempo t.

Resumen

Def. 1 (Ecuación Diferencial Ordinaria): Si una ecuación contiene solo derivadas de una o más variables dependientes respecto a una sola variable independiente se dice que es una *Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO).*
Def. 2 (Orden de una EDO): El *orden* de una EDO es el orden de la mayor derivada de la ecuación. Podemos expresar una EDO de n-ésimo orden como:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

Donde F es una función real de n+2 variables: x, y, y',..., $y^{(n)}$
Def. 3 (EDO lineal): Una *EDO lineal de orden n* es de la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = Q(x),$$

donde las funciones $a_i(x)$ son llamadas coeficientes de la EDO.
En el siguiente cuadro se resumen algunas características de las EDO's lineales.

n	orden de la EDO
$Q(x) = 0$	homogénea
$Q(x) \neq 0$	no homogénea
$\forall i,\, a_i = cte$	coeficientes constantes
$\exists i,\, a_i = a_i(x)$	coeficientes variables
$a_n = 1$	normalizada

Cuadro 1. Clasificación de la EDO lineal $\sum_{i=0}^{n} a_i(x)y^{(i)} = Q(x)$.

Def. 4 (EDO no lineal): Una *EDO no lineal* es una EDO que no es lineal.
Def. 5 (Solución de una EDO): Cualquier función ϕ, definida en un intervalo I y que tiene al menos n deriva- das continuas en I, las cuales cuando se sustituyen en una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden reducen la ecuación a una identidad, se dice que es una solución de la ecuación en el intervalo.
TFC: Sea f integrable en $[a, b]$, entonces, dado $x_0 \in [a, b] e$ $y_0 \in \mathbb{R}$, la función y, definida por

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s)ds, \quad \text{para} \quad x \in [a, b],$$

es continua en $[a, b]$ y se tiene $y(x_0) = y_0$. Si además f es continua en $[a, b]$ entonces la función $y(x)$ es también derivable en $[a, b]$ con derivada continua igual a $f(x)$, esto es, se tiene que

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} y'(s)ds, \quad \forall x \in [a, b]$$
$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(s)ds = f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Las identidades anteriores serán especialmente útiles en este y los próximos capítulos por lo que se sugiere al lector recordarlas siempre, teniendo especial cuidado en no confundir (4) y (5).