P1. (P2 guía 4.1)

a) Considere $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\forall s > 0$, se tiene que $sI - A$ es invertible. Defina $t \mapsto \varphi(t) = e^{At}$ para $t \in [0, \infty[$. Calcule $\mathcal{L}[\varphi'](s)$ y deduzca que

$$\mathcal{L}[e^{At}](s) = (sI - A)^{-1}, \qquad \forall s > 0$$

b) Utilizando la parte anterior, calcule e^{tA} para

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

En que $a, b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$

P1 a) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. $\varphi(t) = e^{At}$ $\forall t \in [0, \infty)$.

Recordar que

$$e^{At} = \begin{bmatrix} | & & | \\ x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ | & & | \end{bmatrix}$$

en que $x_j'(t) = A x_j(t)$ con $x_j(0) = e_j$.

Entonces,

1) $\mathcal{L}[(e^{At})'](s) = \mathcal{L}[A e^{At}](s) = A\mathcal{L}[e^{At}](s)$.

2) $$\mathcal{L}[(e^{At})'](s) = \mathcal{L}\begin{bmatrix} | & & | \\ x_1'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ | & & | \end{bmatrix}(s)$$

$$= \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathcal{L}[x_1'](s) & \cdots & \mathcal{L}[x_n'](s) \\ | & & | \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} | & & | \\ s\mathcal{L}[x_1](s) - x_1(0) & \cdots & s\mathcal{L}[x_n](s) - x_n(0) \\ | & & | \end{bmatrix}$$

$$= s\begin{bmatrix} | & & | \\ \mathcal{L}[x_1](s) & \cdots & \mathcal{L}[x_n](s) \\ | & & | \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ x_1(0) & \cdots & x_n(0) \\ | & & | \end{bmatrix}}_{I_n}$$

$$= s\mathcal{L}\begin{bmatrix} | & & | \\ x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ | & & | \end{bmatrix}(s) - I_n$$

$$= s\mathcal{L}[e^{At}] - I_n.$$

Entonces, juntando 1) y 2):

$$A\mathcal{L}[e^{At}]_{(s)} = sI\mathcal{L}[e^{At}]_{(s)} - I_n$$

$$\Leftrightarrow \quad I_n = (sI - A)\mathcal{L}[e^{At}](s)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{L}[e^{At}](s) = (sI - A)^{-1}}$$

b) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ $\quad a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0.$

vemos que

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-a & -b \\ b & s-a \end{bmatrix}$$

$$|sI - A| = (s-a)^2 + b^2 > 0. \quad (b \neq 0)$$

por lo que

$$\mathcal{L}[e^{At}](s) = (sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s-a)^2 + b^2}\begin{bmatrix} s-a & b \\ -b & s-a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2} & \frac{b}{(s-a)^2+b^2} \\ \frac{-b}{(s-a)^2+b^2} & \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2} \end{bmatrix}$$

ya que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\right](t) = e^{at}\cos(bt)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\pm b}{(s-a)^2+b^2}\right](t) = \pm e^{at}\operatorname{sen}(bt)$$

entonces

$$e^{At} = e^{at}\begin{bmatrix} \cos(bt) & \operatorname{sen}(bt) \\ -\operatorname{sen}(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix}$$

//

P2. **(P3 guía 4.1)** Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. El objetivo de esta pregunta es calcular e^{At}. Para ello, proceda como sigue:

a) Pruebe que para todo $k \in \mathbb{N}$ ocurre que
$$A^{2k} = I \qquad A^{2k+1} = A$$

b) Utilice la definición de e^{At} junto con la parte anterior para deducir que
$$e^{At} = \cosh(t)I + \operatorname{senh}(t)A$$

$$e^{At} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{t^k A^k}{k!}$$

a) $\underline{k=0}$

$$A^0 = I, \qquad A^1 = A \quad \checkmark$$

Ahora, suponemos que para $k \in \mathbb{N}$, se cumple

$$A^{2k} = I, \qquad A^{2k+1} = A$$

y vemos que para $k+1$:

$$A^{2(k+1)} = A^{2k+2} = \underbrace{\cancel{A^{2k}}}_{I} \cdot A^2 = A^2$$

en que
$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Por lo que $A^{2(k+1)} = I$.

Además, $A^{2(k+1)+1} = A^{2(k+1)} \cdot A = I \cdot A = A$.

De modo que por inducción se concluye. $\square$.

b) Recordemos que $\cosh(t)$ y $\operatorname{senh}(t)$ se caracterizan por ser las $\underline{\text{únicas}}$ funciones f_P, f_I tales que

1) f_P es par

2) f_I es impar → Esta descomposición es única !

3) $f_I(t) + f_P(t) = e^t$

si ahora notamos que

Par → ↗ impar

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = \sum_{k \text{ par}} \frac{t^k}{k!} + \sum_{k \text{ impar}} \frac{t^k}{k!}$$

vemos que necesariamente,

$$\cosh(t) = \sum_{k \text{ par}} \frac{t^k}{k!}$$

$$\operatorname{senh}(t) = \sum_{k \text{ impar}} \frac{t^k}{k!}$$

Así, vemos que

$$e^{At} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{t^k A^k}{k!} = I \sum_{k \text{ par}} \frac{t^k}{k!} + A \sum_{k \text{ impar}} \frac{t^k}{k!}$$

$$= \cosh(t)\, I + \operatorname{senh}(t)\, A \quad \blacksquare$$