(1)

P1. Considere el sistema lineal de tipo $x'(t) = Ax(t)$ en que

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

Calcule su matriz exponencial asociada.

SOL: Diagonalizar A

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 8 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2 + 16 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow 1+\lambda = \pm 4i \Rightarrow \lambda = -1 \pm 4i$$

$\lambda_1 = -1-4i \;\rightarrow$ vector propio $\vec{P_1} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{P_2 = 1}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1-(-1-4i) & -2 & 0 \\ 8 & -1-(-1-4i) & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 4i & -2 & 0 \\ \cancel{8} & \cancel{4i} & \cancel{0} \end{array}\right]$$

$$4i P_1 - 2 = 0 \Rightarrow P_1 = \frac{1}{2i} = \frac{-i}{2}$$

$$\vec{P_1} = \begin{bmatrix} -i/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1+4i \longrightarrow \vec{P_2} = \begin{bmatrix} i/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} -i/2 & i/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} -1-4i & 0 \\ 0 & -1+4i \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} -i/2 & i/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{P^{-1}}$$

$$\rightarrow e^{tA} = P e^{tD} P^{-1} = P \begin{bmatrix} e^{(-1-4i)t} & 0 \\ 0 & e^{(-1+4i)t} \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -i/2 & i/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-\frac{i}{2} - \frac{i}{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i/2 \\ -1 & -i/2 \end{bmatrix}$$

$$= \cancel{\frac{1}{-i}}^{\,i} \begin{bmatrix} 1 & -i/2 \\ -1 & -i/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 1/2 \\ -i & 1/2 \end{bmatrix}$$

Además:

$$e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{-t}(\cos(4t) - i\,\mathrm{sen}(4t)) & 0 \\ 0 & e^{-t}(\cos(4t) + i\,\mathrm{sen}(4t)) \end{bmatrix}$$

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} -i/2 & i/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t}(\cos(4t) - i\,\mathrm{sen}(4t)) & 0 \\ 0 & e^{-t}(\cos(4t) + i\,\mathrm{sen}(4t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 1/2 \\ -i & 1/2 \end{bmatrix}$$

obs: e^{tA} debería tener entradas reales.

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} X^1(t) & X^2(t) \end{bmatrix}$$

$$X^1(t) \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X^2(t) \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -i/2 & i/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t}(\mathrm{sen}(4t) + i\cos(4t)) & \frac{e^{-t}}{2}(\cos(4t) - i\,\mathrm{sen}(4t)) \\ e^{-t}(\mathrm{sen}(4t) - i\cos(4t)) & \frac{e^{-t}}{2}(\cos(4t) + i\,\mathrm{sen}(4t)) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{e^{-t}}{\cancel{2}}\cancel{i}\cdot\cancel{2}\cancel{i}\cos(4t) & -\frac{e^{-t}}{2\cdot\cancel{2}}\cancel{2i}\,\mathrm{sen}(4t) \\ 2e^{-t}\,\mathrm{sen}(4t) & \cancel{2}\frac{e^{-t}}{\cancel{2}}\cos(4t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t}\cos(4t) & -\frac{e^{-t}}{2}\,\mathrm{sen}(4t) \\ 2e^{-t}\,\mathrm{sen}(4t) & e^{-t}\cos(4t) \end{bmatrix} //$$

$$X' = AX$$

$$X(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

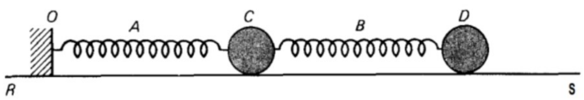
$$x^1(t) = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos(4t) \\ 2e^{-t}\operatorname{sen}(4t) \end{bmatrix} \to \text{resuelve (1)}$$

con $x^1(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$x^2(t) = \begin{bmatrix} \frac{-e^{-t}}{2}\operatorname{sen}(4t) \\ e^{-t}\cos(4t) \end{bmatrix} \to \text{resuelve (1)}$$

con $x^2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

P2. (Resortes acoplados) Considere el siguiente sistema de resortes acoplados, en que ambos resortes poseen igual constante k y ambas masas son iguales a M.



a) Plantee la dinámica del problema como un sistema lineal de primer orden a coeficientes constantes, encuentre la matriz A asociada.

b) Encuentre los valores propios de la matriz A.

c) En base a lo anterior, describa la forma de la solución general (no la calcule explícitamente). Si una construcción de este tipo se utilizara como un sistema de amortiguación –por ejemplo, disponiéndolo de forma vertical para que personas caminen sobre él– conjeture los peligros que podría haber.

Dado $t > 0$, sea

$x_1(t)$ = Desviación de C hacia la derecha

$x_2(t)$ = " " D " " "

Fuerzas:

·) $A \to C$ | $-kx_1$

··) $B \to C$ | $-k(x_1 - x_2)$

···) $B \to D$ | $k(x_1 - x_2)$

x_1| $M\ddot{x}_1(t) = -k(2x_1 - x_2)$ / $\omega^2 = \frac{k}{M}$

x_2| $M\ddot{x}_2(t) = k(x_1 - x_2)$

$$\left\{\begin{aligned} \ddot{x}_1(t) &= w^2 x_2 - 2w^2 x_1 \\ \ddot{x}_2(t) &= w^2 x_1 - w^2 x_2 \end{aligned}\right. \qquad \left|\begin{aligned} V_1 &= \dot{x}_1 \\ V_2 &= \dot{x}_2 \end{aligned}\right.$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2w^2 & w^2 & 0 & 0 \\ w^2 & -w^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -2w^2 & w^2 & -\lambda & 0 \\ w^2 & -w^2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{sympy}}{=} \lambda^4 + 3\lambda^2 w^2 + w^4$$

$$\Omega = \lambda^2$$

$$= \Omega^2 + 3w^2\Omega + w^4$$

$$= \Omega^2 + 2\,\frac{3}{2}w^2\,\Omega + \left(\frac{3}{2}w^2\right)^2 - \left(\frac{3}{2}w^2\right)^2 + w^4$$

$$= \left(\Omega + \frac{3}{2}w^2\right)^2 + w^4\left(1 - \frac{9}{4}\right)$$

$$= \left(\Omega + \frac{3}{2}w^2\right)^2 - \frac{5}{4}w^4 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \left(\Omega + \frac{3}{2}w^2\right)^2 = \frac{5}{4}w^4$$

$$\Rightarrow \left|\Omega + \frac{3}{2}w^2\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}w^2$$

$$\Rightarrow \Omega + \frac{3}{2}w^2 = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}w^2$$

$$\Rightarrow \Omega = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}\, \omega^2 = \lambda^2 \rightarrow \text{Bien.}$$

$$\lambda = \pm i \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}\, \omega$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= -i\omega\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \\ \lambda_2 &= i\omega\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \end{aligned}\right] \rightarrow \vec{P}_{1,2}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_3 &= -i\omega\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \\ \lambda_4 &= i\omega\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \end{aligned}\right] \rightarrow \vec{P}_{3,4}$$

$$\rightarrow P e^{tD} P^{-1} = \exp(tA)$$

imaginario puro

van a ser $\exp(\lambda_i t)$

$$\Rightarrow e^{tD} \text{ contiene } \begin{pmatrix} \cos\left(\pm\omega\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}\, t\right) + i \operatorname{sen}(\ ---\ ) \\ \\ \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ oscilatorias con frecuencias

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \omega\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \\ f_2 &= \omega\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \end{aligned}\right] \text{ frecuencias naturales.}$$

$\downarrow$

si añadiéramos fuerza externa con alguna de estas frecuencias, el sistema entra en resonancia.