

clase jueves 23/05

(1)

Partamos con una demostración pendiente (del aux)

A partir de la ecuación $ty'' + y' + y = 0$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 0$$

llegamos a que $Y(s) = \mathcal{L}(y)(s)$ satisfase

$$(1+s^2)Y'(s) + sY(s) = 0$$

y obtenemos $Y(s)$ con una condición ~~limitada~~ sobre los valores de $Y(s)$. El resultado es el siguiente:

Teorema: (de valor inicial)

$$\text{Sea } F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}(f)(s)$$

con f de orden exponencial ($|f(t)| \leq M e^{ct} \forall t \geq t_0$)
y tal que existe $f(0^+) := \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$. Entonces

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) = f(0^+)$$

Dem. (El resultado es general, pero asumiremos que f es ~~continua~~ derivable de orden exponencial).
Continúa en 0

Tenemos que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0. \text{ Ya que}$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \leq M \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-st+ct} dt$$

$$= M \int_0^\infty \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-st+ct} dt = 0.$$

($\int_0^\infty$ con 0 uniforme dominada)

Aplicando esto sobre f' , obtenemos que

(2)

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}(f')|s) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} (s \mathcal{L}(f)(s) - f(0)) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} s \mathcal{L}(f)(s) = f(0) = \boxed{f(0^+)}$$

Resolvamos ahora un problema de auxiliar

consideremos

$$\ddot{x} + k^2 x(t) = F(t)$$

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

a) Resuelva.

sol: con transf de Laplace, vemos que

$$(s^2 + k^2) \mathcal{L}(x)(s) - 0 = \mathcal{L}(F)(s)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(x)(s) = \frac{1}{s^2 + k^2} \mathcal{L}(F)(s) = \frac{1}{k^2} \mathcal{L}(\sin(kt)) \mathcal{L}(F)(s)$$

$$= \frac{1}{k^2} \mathcal{L}(F \sin(kt))(s)$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{k^2} \int_0^t F(u) \sin(k(t-u)) du \quad \square$$

b) considere $F_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{\varepsilon} & t \in [0, \varepsilon] \\ 0 & \sim \\ & \text{para } t > \varepsilon \end{cases}$

ed:

$$x_\varepsilon(t) = \frac{1}{k^2} \int_0^\varepsilon \frac{F_0}{\varepsilon} \sin(k(t-u)) du$$

$$= \frac{1}{k} \frac{F_0}{\varepsilon} \left[\frac{\cos(k(t-u))}{-k} \right]_0^\varepsilon = \frac{F_0}{k^2} \frac{\cos(k(t-\varepsilon)) - \cos(kt)}{\varepsilon}$$

d) Estudie $\varepsilon \rightarrow 0$

(3)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon(t) = \frac{F_0}{k^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\cos(k(t-\varepsilon)) - \cos(kt)}{\varepsilon}$$

$$= \frac{F_0}{k^2} \left[\frac{d}{du} \cos(k(t-u)) \right] (0)$$

$$= \frac{F_0}{k^2} \cdot + \sin(k(t-u)) \cdot + k \Big|_{u=0}$$

$$= \frac{F_0}{K} \sin(kt)$$

Veros que este $x(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon(t)$ resuelve

$$\ddot{x} + k^2 x(t) = 0$$

$$x(0) = 0$$

$$\dot{x}(0) = F_0$$

{es como si hubiérn cambiado la condición inicial}

¿Qué pasa con la transformada de Laplace de estas funciones $F_\varepsilon(t)$?

Ejercicio (propuesto)

pruebe que si $F_a^\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & t \in [a, a+\varepsilon] \\ 0 & \sim \end{cases} \quad (a > 0)$

entonces

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}(F_a^\varepsilon)(s) = e^{-sa} \quad (\forall s \geq 0)$$

En particular si $a=0$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}(F_0^\varepsilon)(s) = 1$.

Notar que ninguna de estas funciones es e^{-sa} y 1
tiene anti transformada y los límites

(4)

$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_a^\epsilon(t)$ no están bien definidos.

pero el objeto si es de interés como muestra el
problema que resolvimos. pero que lo definimos

Def. (Delta de Dirac)

δ_a es a quel "objeto matemático" tal que

$$\boxed{\mathcal{L}(\delta_a)(s) = e^{-sa}} \quad (\forall s > 0)$$

$$\rightarrow \mathcal{L}(\delta_0)(s) = 1$$

(Denotamos $\delta_0 =: \delta$)

Nota: se cumple la formula de traslación

$$\mathcal{L}(\delta(t-a)H(t-a))$$

$$= \mathcal{L}(\delta(t-a)) = e^{-sa} = e^{-sa} \cdot 1 = e^{-sa} \mathcal{L}(\delta)$$

Para ver el impacto de esto en la resolución de EDOs, ~~vean~~
recuerden lo siguiente.

~~$P(D)x = F$~~ $\rightarrow$ EDO lineal no homogénea
de orden n .

(5)

$$x'' + a_1 x' + a_0 x = F$$

$$x(0) = x_0$$

$$x'(0) = x_1$$

$$\Rightarrow s^2 \mathcal{L}(x(s)) - s x(0) - x'(0) + a_1 (s \mathcal{L}(x(s)) - x(0)) + a_0 \mathcal{L}(x(s)) = \mathcal{L}(F)(s)$$

$$\Rightarrow (s^2 + a_1 s + a_0) \mathcal{L}(x(s)) - (s x_0 + a_1 x_0 + x_1) = \mathcal{L}(F)(s)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(x(s)) = \frac{s x_0 + a_1 x_0 + x_1}{s^2 + a_1 s + a_0} + \frac{\mathcal{L}(F)(s)}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$\Rightarrow x(t) = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s x_0 + a_1 x_0 + x_1}{p(s)}\right)}_{x_h(t)} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathcal{L}(F)(s)}{p(s)}\right)}_{x_p(t)}(t)$$

x_h : lo que sobrevive si $F \equiv 0$, corresponde a la sol. ~~no~~ de

$$\begin{cases} x'' + a_1 x' + a_0 x = 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = x_1 \end{cases}$$

x_p : lo que sobrevive si $x_2 = x_0 = 0$, corresponde a la sol. de

$$\begin{cases} x'' + a_1 x' + a_0 x = F \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

se le llama función "respuesta ~~al~~ ~~input~~ a F

Notar además que si $F = \delta$, entonces

(6)

$$X(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s x_0 + a_2 x_0 + x_1}{P(s)} \right) + \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{P(s)} \right) (t)$$

expresión de impulso $\rightarrow G(t)$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s x_0 + a_2 x_0 + (x_1 + s)}{P(s)} \right)$

esto en general no pasa

= la solución de $\begin{cases} x'' + a_2 x' + a_0 x = 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = x_1 + 1 \end{cases}$

Ahora, si $F = \delta_a$, entonces

$$X(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s x_0 + a_2 x_0 + x_1}{P(s)} \right) + \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{e^{-sa}}{P(s)} \right) (t)$$

$$= x_h(t) + \mathcal{L}^{-1} \left(e^{-sa} \mathcal{L}(G(t-a)) \right)$$

$$= x_h(t) + \mathcal{L}^{-1} \left(\mathcal{L}(G(t-a) H(t-a)) \right)$$

$$= x_h(t) + G(t-a) H(t-a) \rightarrow G(t) \text{ resuelta}$$

= ~~se trata~~ de como si nada
hubiera pasado hasta
momento a y luego
seer $G(t)$ trasladado.
(Incrementar velocidad en 1
en $t=a$) $\rightarrow$ Recomendación: el P11 de la guía

$$\begin{cases} x'' + a_2 x' + a_0 x = 0 \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$$

Comentario sobre la función respuesta al impulso.

⑦

Recordar que $G(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p(s)}\right)(t)$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}(G)(s) = \frac{1}{p(s)}$$

Entonces recordando nuestra fórmula general:

$$X(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s x_0 + a_1 x_0 + x_1}{p(s)}\right)(t) + \mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L}(F)(s) \cdot \frac{1}{p(s)}\right)(t)$$

$$= x_h(t) + \mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L}(F)(s) \mathcal{L}(G)(s)\right)(t)$$

$$= x_h(t) + \mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L}(F \star G)(s)\right)(t)$$

$$= x_h(t) + (F \star G)(t)$$

$$= x_h(t) + \int_0^t G(t-u) F(u) du$$

{ Si sabemos cómo el sistema responde a un impulso,
sabemos cómo responde a cualquier fuerza