

P2] (Coeficientes indeterminados)

①

a) Resolver

$$y'' + 4y = 4e^{2x} \quad (1)$$

Sol:

homogénea: $y'' + 4y = 0$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - (2i)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda + 2i)(\lambda - 2i) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2i \rightarrow y_1(x) = e^{2ix} = \cos(2x) + i\sin(2x) \\ \lambda_2 = -2i \rightarrow y_2(x) = e^{-2ix} \end{cases}$$

Tomando parte real e imaginaria, obtenemos que
 $y_h(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$ es sol homogénea.

particular:

Método 1 vemos que

$$(D - 2) e^{2x} = 0$$

Por lo que si y es sol particular de (1), entonces

$$(D^2 + 4)y = 4e^{2x} \quad | (D - 2)$$

$$\Rightarrow (D - 2)(D^2 + 4)y = 0$$

Por lo que y pertenece a la sol homogénea de esta ecuación, que es

$$y(x) = C_1 e^{+2x} + C_2 \cos(2x) + C_3 \sin(2x)$$

Tomando lo que no está en la homogénea anterior, (2)
se obtendrá la forma

$$y(x) = a e^{+2x}$$

$$\rightarrow y'(x) = -2a e^{+2x}$$

$$\rightarrow y''(x) = 4a e^{+2x}$$

que reemplazando en (1), obtenemos que

$$4a e^{+2x} + 4a e^{+2x} = 4e^{+2x}$$

$$\Rightarrow 8a = 4 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Por lo que la sol particular es

$$y_p(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$$

y la genral es

$$y(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x).$$

Método 2 / Podríamos haberlos dado cuenta de que

la forma $y_p(x) = a e^{2x}$ probablemente nos iba a dar
una solución de la EDO. De modo que la podríamos
haber ensayado desde el inicio.

b) Resuelva

③

$$y'' + 4y' + 9y = x^2 + 3x$$

sol:

homogénea $y'' + 4y' + 9y = 0$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 9 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 4 + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda + 2)^2 + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda + 2)^2 - (\sqrt{5}i)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda + 2 + \sqrt{5}i)(\lambda + 2 - \sqrt{5}i) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2 + \sqrt{5}i \\ \lambda_2 = -2 - \sqrt{5}i \end{cases} \rightarrow y(x) = e^{(-2 + \sqrt{5}i)x} \\ = e^{-2x} e^{\sqrt{5}ix} \\ = e^{-2x} (\cos(\sqrt{5}x) + i \sin(\sqrt{5}x))$$

Es decir, la homogénea es

$$y_h(x) = C_1 e^{-2x} \cos(\sqrt{5}x) + C_2 e^{-2x} \sin(\sqrt{5}x)$$

Particular: método 1 | Viendo que

$$D^3(x^2 + 3x) = 0$$

obtener la forma de la solución particular y obtener los coeficientes (propuesto)

método 2 | Ensayamos

$$y(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow y'(x) = 2ax + b \\ \rightarrow y''(x) = 2a$$

Reemplazando,

(4)

$$2a + 4(2ax+b) + 9(ax^2+bx+c) = x^2 + 3x$$

$$\Rightarrow 9ax^2 + (8a + 9b)x + (2a + 4b + 9c) = 1x^2 + 3x + 0$$

obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 9a = 1 \\ 8a + 9b = 3 \\ 2a + 4b + 9c = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \text{tiene solución} \\ a = \frac{1}{9} \\ b = \frac{19}{81} \\ c = \frac{-94}{729} \end{array} \right.$$

Por lo que la sol general es

$$y(x) = \frac{1}{9}x^2 + \frac{19}{81}x - \frac{94}{729} + e^{-2x}(C_1 \cos(\sqrt{5}x) + C_2 \sin(\sqrt{5}x))$$

(c) Resolver

$$(D^2 + 2D + 1)y = 2 \cos(2x) + 3x + 2 + 3e^x$$

homogenea $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$$\Rightarrow (\lambda + 1)^2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -1$$

$$\Rightarrow y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = x e^{-x}$$

$$y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

Particular: Intentamos

⑤

$$y(x) = a \sin(2x) + b \cos(2x) + cx + d + f e^x$$

$$\rightarrow y'(x) = 2a \cos(2x) - 2b \sin(2x) + c + f e^x$$

$$\rightarrow y''(x) = -4a \sin(2x) - 4b \cos(2x) + f e^x$$

Reemplazando,

$$-4a \sin(2x) - 4b \cos(2x) + f e^x + 2(2a \cos(2x) - 2b \sin(2x) + c + f e^x)$$

$$+ a \sin(2x) + b \cos(2x) + cx + d + f e^x =$$

$$2 \cos(2x) + 3x + 2 + 3 e^x$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x)(-4a - 4b + a) + \cos(2x)(-4b + 4a + b)$$

$$+ cx + (2c + d) + e^x(f + 2f + f)$$

$$= 2 \cos(2x) + 3x + 2 + 3 e^x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4f = 3 \\ 2c + d = 2 \\ c = 3 \\ -3a + 4b = 0 \\ 4a - 3b = 2 \end{cases}$$

solucion
→

$$f = 3/4$$

$$c = 3$$

$$d = -4$$

$$a = 8/25$$

$$b = -6/25$$

La sol general es

⑥

$$y(x) = \frac{8}{25} \sin(2x) - \frac{6}{25} \cos(2x) + 3x - 4 + \frac{3}{4} e^x + (c_1 + c_2 x) e^{-x}$$

d) Resuelva

$$(D^2 + 3D + 2)y = 4e^{-2x} \quad (2)$$

Sol: Homogénea

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = -2 \rightarrow y_1(x) = e^{-2x}$$

$$\lambda_2 = -1 \rightarrow y_2(x) = e^{-x}$$

Particular: Notemos que

$$(D+2)e^{-2x} = 0.$$

Entonces, si $y(x)$ es sol de (2), tenemos

$$(D+2)(D+1)y = 4e^{-2x} \quad / (D+2)$$

$$(D+2)^2(D+1)y = \cancel{4e^{-2x}} 0$$

La sol homogénea de esto es

$$y(x) = c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3 x) e^{-2x}$$

La parte que no está en la homogénea de (2) es $c_3 x e^{-2x}$
por lo que esa es la forma que habrán que intentar.

e) Resolver

⑦

$$(D^4 - 1)y = \cosh(x).$$

sol: Homogénea: $y'''' - y = 0$

$$\lambda^4 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda^2 - (i)^2) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda + i)(\lambda - i) = 0$$

$$\lambda_1 = -1 \rightarrow y_1(x) = e^{-x}$$

$$\lambda_2 = 1 \rightarrow y_2(x) = e^x$$

$$\lambda_3 = i \rightarrow y_3(x) = e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x).$$

Tomando parte real la sol homogénea es

$$y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 \cos(x) + c_4 \sin(x).$$

Particular: Ensayamos

$$y(x) = a x \cosh(x) + b x \sinh(x)$$

$$\rightarrow y'(x) = a \cosh(x) + x \sinh(x)$$

$$\rightarrow y''(x) = a \sinh(x) + \sinh(x) + x \cosh(x) \\ = a \cosh(x) + \sinh(x) + x \cosh(x)$$

$$\rightarrow y'''(x) = 2 \cosh(x) + \cosh(x) + x \sinh(x) \\ = 3 \cosh(x) + x \sinh(x)$$

$$\rightarrow y^{(4)}(x) = 3 \sinh(x) + \sinh(x) + x \cosh(x)$$

$$\rightarrow y'(x) = a(\cosh(x) + x \sinh(x)) + b(\sinh(x) + x \cosh(x))$$

$$\rightarrow y''(x) = a(2\sinh(x) + x \cosh(x)) + b(2\cosh(x) + x \sinh(x))$$

$$\rightarrow y'''(x) = a(3\cosh(x) + x \sinh(x)) + b(3\sinh(x) + x \cosh(x))$$

$$\rightarrow y^{(4)}(x) = a(4\sinh(x) + x \cosh(x)) + b(4\cosh(x) + x \sinh(x))$$

peñflezando:

$$y a \sinh(x) + a x \cosh(x) + 4b \cosh(x) + b x \sinh(x) - a x \cosh(x) - b x \sinh(x) = \cosh(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a = 0 \\ b = \frac{1}{4} \end{matrix}}$$

por lo que

$$y_p(x) = \frac{1}{4} x \sinh(x).$$

y la sol. general es:

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 \cos(x) + C_4 \sin(x) + \frac{1}{4} x \sinh(x).$$

P2] (Variación de parámetros y ~~resonancia~~)

Considere la ecuación del resorte no amortiguado forzado

$$m \ddot{x}(t) + k x(t) = F(t) \quad (t > 0)$$

sujeta a las condiciones iniciales $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

a) pruebe que

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{k/m}} \int_0^t F(u) \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-u)\right) du$$

Dem: Solución homogénea:

$$m \ddot{x}(t) + k x(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x}(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0 \quad / \quad x(t) = e^{\lambda t}$$

$$\rightarrow \lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - \left(\sqrt{\frac{k}{m}} i\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + i\sqrt{\frac{k}{m}})(\lambda - i\sqrt{\frac{k}{m}}) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = i\sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow x(t) = e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} = \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + i \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

$$\lambda_2 = -i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Tomando parte real e imaginaria, se obtiene

$$x_1(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

$$x_2(t) = \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

$$\rightarrow x_h(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Para obtener la particular, utilizamos el método de variación de parámetros.

Nuestra ecuación es

(10)

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = F(t) \quad (2)$$

y tenemos las soluciones homogéneas

$$x_1(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

$$x_2(t) = \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Por lo que buscamos $A(t)$, $B(t)$ tales que

$$x = Ax_1 + Bx_2$$

sea solución de (1) con $A'x_1 + B'x_2 = 0$.

Así,

$$x = Ax_1 + Bx_2$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \dot{A}x_1 + \dot{B}x_2 + A\dot{x}_1 + B\dot{x}_2$$
$$= A\dot{x}_1 + B\dot{x}_2$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \dot{A}\dot{x}_1 + \dot{B}\dot{x}_2 + A\ddot{x}_1 + B\ddot{x}_2$$

Imponiendo (1) por una ecuación genérica

$$\ddot{x}(t) + P(t)\dot{x}(t) + Q(t)x(t) = F(t),$$

obtenemos

$$\dot{A}\dot{x}_1 + \dot{B}\dot{x}_2 + \cancel{A\ddot{x}_1} + \cancel{B\ddot{x}_2} + P(\cancel{Ax_1} + \cancel{Bx_2}) + Q(\cancel{Ax_1} + \cancel{Bx_2}) = F(t)$$

$$\Rightarrow \dot{A}\dot{x}_1 + \dot{B}\dot{x}_2 = F(t).$$

Em consecuencia,

$$\dot{A} x_1 + \dot{B} x_2 = 0$$

$$\dot{A} \dot{x}_2 + \dot{B} \dot{x}_1 = F$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{A} \\ \dot{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \dot{A} \\ \dot{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} = \frac{1}{W(x_1, x_2)} \begin{pmatrix} \dot{x}_2 & -x_2 \\ -\dot{x}_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{W(x_1, x_2)} \begin{pmatrix} -x_2 F \\ x_1 F \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$A(t) = - \int \frac{x_2(s)}{W(x_1, x_2)(s)} F(s) ds$$

$$B(t) = \int \frac{x_1(t)}{W(x_1, x_2)(t)} F(t) dt.$$

Formulas de variación de parámetros.

Ahora, aproximemos a nuestro problema.

El Wronskiano: por la identidad de Abel,

$$W(x_1, x_2)(t) = C e^{\int P(t) dt} \rightarrow \text{esto es nulo en nuestro caso.}$$

Por lo tanto el Wronskiano es una función $W(t) \equiv \text{cte.}$ obtenemos era constante evaluando en un punto

$$W = \begin{vmatrix} \cos(\sqrt{\frac{k}{m}} t) & \sin(\sqrt{\frac{k}{m}} t) \\ -\sin(\sqrt{\frac{k}{m}} t) \sqrt{\frac{k}{m}} & \cos(\sqrt{\frac{k}{m}} t) \sqrt{\frac{k}{m}} \end{vmatrix} = W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{k}{m}} \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{k}{m}} //$$

Hasta ahora, la solución general es entonces de la forma:

(12)

$$x(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

$$+ \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \sqrt{\frac{m}{k}} \int F(t) \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) dt$$

$$+ \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \sqrt{\frac{m}{k}} \int F(t) \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) dt$$

(Hay 4
condiciones
por fijar)

Para media cantidad, fijemos 2 constantes imponiendo que la particular se anule en $t=0$. De modo que puede escribirse en la forma

$$x(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

$$- \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^t F(s) \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}s\right) ds$$

$$+ \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^t F(s) \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}s\right) ds$$

Ahora, manipulamos la particular como sigue:

$$x_p(t) = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^t F(u) \left(\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}u\right) - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}u\right) \right) du$$

$$= \sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^t F(u) \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-u)\right) du$$

y imponiendo las condiciones $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ se puede ver que necesariamente $C_1 = C_2 = 0$, por lo que se concluye lo pedido.

b) Resuelva en el caso en que

(13)

$$F(t) = \begin{cases} F_0/\varepsilon, & t \in [0, \varepsilon] \\ 0, & t > \varepsilon \end{cases}$$

$(F_0, \varepsilon \text{ fijos})$

sol: obtenemos que para $t \geq \varepsilon$

$$x(t) = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^t F(u) \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-u)\right) du$$

$$= \sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^\varepsilon \frac{F_0}{\varepsilon} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-u)\right) du + 0$$

$$= \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{F_0}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-u)\right) du$$

$$= \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{F_0}{\varepsilon} \left[\frac{\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-u)\right)}{+\sqrt{\frac{k}{m}}} \right]_0^\varepsilon$$

$$= \frac{m}{k} \frac{F_0}{\varepsilon} \left(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-\varepsilon)\right) - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \right)$$

c) haga $\varepsilon \rightarrow 0$.

veros que para $t \geq 0$ fijo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t) = \frac{m F_0}{k} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-\varepsilon)\right) - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)}{\varepsilon}$$

Identificamos este límite con la derivada de la función

$\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-u)\right)$ en $u=0$. Por lo que el límite es

$$+ \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-u)\right) \cdot +\sqrt{\frac{k}{m}} \Big|_{u=0} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

En consecuencia,

(14)

$$X(t) = \frac{m a F_0}{k} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$
$$= \sqrt{\frac{m}{k}} F_0 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$

esta es la solución que habría para $F \equiv 0$ si las condiciones iniciales fueran $X(0) = 0$, $\dot{X}(0) = F_0$. Por lo que esta fuerza externa equivale a un impulso en el instante $t=0$.

