

2) considere el sgte problema:

①

$$\begin{cases} (1) & y \neq 0 \text{ y } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tdes que} \\ (2) & y'' + \lambda y = 0 \\ (3) & y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases}$$

a) Encontrar la sol. general de (2) cuando $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ y $\lambda > 0$.

sd:

$\lambda < 0$ El polinomio característico asociado a encontrar soluciones de tipo $y(t) = e^{mt}$ es $\rightarrow > 0$

$$m^2 + \lambda = 0 \quad (\Rightarrow) \quad m^2 - (-\lambda) = 0$$

$$(\Rightarrow) m^2 - (\sqrt{-\lambda})^2 = 0 \quad (\Rightarrow) \quad (m + \sqrt{-\lambda})(m - \sqrt{-\lambda}) = 0.$$

$$\Rightarrow m_1 = \sqrt{-\lambda}$$

$$m_2 = -\sqrt{-\lambda}$$

Por lo que se obtienen las dos soluciones LI siguientes:

$$y_1(t) = e^{\sqrt{-\lambda}t}$$

$$y_2(t) = e^{-\sqrt{-\lambda}t}$$

Por lo que la sol general es

$$y(t) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}t} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}t}$$

$\lambda = 0$ El problema se reduce a $y'' = 0$. Por lo que la sol general es

$$y(t) = C_1 t + C_2 //$$

$\lambda > 0$ el polinomio característico es:

$$m^2 + \lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - (i\sqrt{\lambda})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m + i\sqrt{\lambda})(m - i\sqrt{\lambda}) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \pm i\sqrt{\lambda}$$

Por lo que tenemos las siguientes dos soluciones LI:

$$y_1(t) = e^{i\sqrt{\lambda}t} = \cos(\sqrt{\lambda}t) + i \sin(\sqrt{\lambda}t)$$

$$y_2(t) = e^{-i\sqrt{\lambda}t} = \cos(-\sqrt{\lambda}t) + i \sin(-\sqrt{\lambda}t)$$

$$= \cos(\sqrt{\lambda}t) - i \sin(\sqrt{\lambda}t)$$

Para obtener soluciones reales, construyamos las dos siguientes soluciones a partir de estas:

$$y_3 := \frac{y_1 + y_2}{2} = \cos(\sqrt{\lambda}t)$$

$$y_4 := \frac{y_1 - y_2}{2i} = \sin(\sqrt{\lambda}t)$$

¿Si forman una base?

Podemos ya que

$$\begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2i} & \frac{-1}{2i} \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{con } \det(M) = \frac{1}{4i} - \frac{1}{4i} = \frac{-1}{2i} \neq 0$$

de modo que M es invertible y por lo tanto preservan la independencia lineal. Así, la solución general es

$$y(t) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}t) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}t) //$$

b) si $\lambda \leq 0$, demuestre que las condiciones (1) y (3) no pueden satisfacerse para ninguna solución particular de (2). ③

Sol: caso $\lambda < 0$.

Imponiendo $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$, obtenemos

$$(1) \quad C_1 + C_2 = 0$$

$$(2) \quad C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}\pi} & e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En que sabemos que $C_1 = C_2 = 0$ es una solución. Pero es también la única ya que

$$\det(M) = e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} - e^{\sqrt{-\lambda}\pi}$$

$$\text{y } \det(M) = 0 \Leftrightarrow e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = e^{\sqrt{-\lambda}\pi}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{-\lambda}\pi = \sqrt{-\lambda}\pi \Leftrightarrow \sqrt{-\lambda} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \quad \times$$

De modo que $\det(M) \neq 0 \Rightarrow M$ invertible

$\Rightarrow \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es la única solución. Así que el problema solo se satisface para $y \equiv 0$.

Caso $\lambda = 0$ | Del mismo modo se obtiene

$$y(0) = 0 \cdot C_1 + C_2 = 0$$

$$y(\pi) = \pi C_1 + C_2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con $\det(M) = -\pi \neq 0$. Así que tb solo se satisface para $y \equiv 0$.

a) si $\lambda > 0$, demuestre que las condiciones (1) y (3) se pueden satisfacerse para alguna solución particular de (2) siempre que λ tome valores en $\lambda_n \rightarrow \infty$. Determine la sucesión.

sol: Imponiendo las condiciones, obtenemos

$$(1) \quad y(0) = 1 \cdot C_1 + 0 \cdot C_2 = 0$$

$$(2) \quad y(\pi) = \cos(\sqrt{\lambda}\pi)C_1 + \sin(\sqrt{\lambda}\pi)C_2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos(\sqrt{\lambda}\pi) & \sin(\sqrt{\lambda}\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

M

con $\det(M) = \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$
 y los valores de λ para los cuales existe solución $C_1, C_2 \neq 0$, son los λ tales que
 $\det(M) = 0 \Leftrightarrow \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\lambda}\pi = m\pi \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \lambda = m^2$$

por lo que existe solución no nula al problema de frontera para $\lambda_n = m^2 \rightarrow \infty$. $\square$

d) Multiplicando (2) por $y(t)$ e integrando en $t \in [0, \pi]$, pruebe que $\lambda \geq 0$ si

(5)

$$y \neq \text{cte} \quad y \quad \begin{vmatrix} y(0) & y'(\pi) \\ y(\pi) & y'(0) \end{vmatrix} \geq 0.$$

Dem: $y'' + \lambda y = 0 \quad \int_0^\pi y \quad \int_0^\pi (\quad) dt$

$$\Leftrightarrow y'' y + \lambda y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\pi y''(t) y(t) dt + \lambda \int_0^\pi y^2(t) dt = 0.$$

Haciendo integración por partes sobre la primera integral, obtenemos que

$$y(t) y'(t) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi (y'(t))^2 dt + \lambda \int_0^\pi y^2(t) dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} y(\pi) & y(0) \\ y'(0) & y'(\pi) \end{vmatrix} - \int_0^\pi (y'(t))^2 dt + \lambda \int_0^\pi y^2(t) dt = 0$$

$$\Leftrightarrow - \begin{vmatrix} y(0) & y'(\pi) \\ y(\pi) & y'(0) \end{vmatrix} - \int_0^\pi (y'(t))^2 dt + \lambda \int_0^\pi y^2(t) dt = 0$$

$$\Rightarrow \lambda \int_0^\pi y^2(t) dt = \begin{vmatrix} y(0) & y'(\pi) \\ y(\pi) & y'(0) \end{vmatrix} + \int_0^\pi (y'(t))^2 dt \rightarrow \neq 0$$

positivo si $y \neq \text{cte}$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\begin{vmatrix} y(0) & y'(\pi) \\ y(\pi) & y'(0) \end{vmatrix} + \int_0^\pi (y'(t))^2 dt}{\int_0^\pi y^2(t) dt} > 0 \quad \square.$$

P2

$$y'' + y = \tan(x)$$

⑥

Sol: Como vimos anteriormente, para $\lambda=1$, la solución homogénea es

$$y_1(x) = \cos(x) \quad | \quad y_2(x) = \sin(x).$$

A continuación, recordamos el método de variación de parámetros.

Buscamos $A(x)$ y $B(x)$ tales que

(1) $Ay_1 + By_2$ sea solución de la ecuación

(que genéricamente tomamos como $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$)

$$(2) A'y_1 + B'y_2 = 0.$$

Así, tenemos

$$y = Ay_1 + By_2$$

$$\Rightarrow y' = Ay_1' + By_2' + \overbrace{A'y_1 + B'y_2}^{=0}$$

$$\Rightarrow y'' = Ay_1'' + By_2'' + A'y_1' + B'y_2'$$

Reemplazando, obtenemos

$$Ay_1'' + By_2'' + A'y_1' + B'y_2' + P(\cancel{Ay_1'} + \cancel{By_2'})$$

$$+ Q(\cancel{Ay_1} + \cancel{By_2}) = R$$

$$\Rightarrow A'y_1' + B'y_2' = R.$$

Tenemos entonces las ecuaciones

(7)

$$(1) A' y_1' + B' y_2' = R$$

$$(2) A' y_1 + B' y_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz M es $\begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}$.

Es decir, $(\rightarrow)$ el Wronskiano, que es siempre no nulo.
Por lo que esta matriz siempre se puede invertir
dejando

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} = \frac{1}{-W(x)} \begin{pmatrix} y_2 & -y_2' \\ -y_1 & y_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{W(x)} \begin{pmatrix} -y_2 & +y_2' \\ +y_1 & -y_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{W(x)} \begin{pmatrix} -R y_2 \\ y_1 R \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$A(x) = \int \frac{-y_2(x)}{W(x)} \cdot R(x) dx$$

$$B(x) = \int \frac{y_1(x)}{W(x)} \cdot R(x) dx$$

Por lo que la solución general es

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) - y_1(x) \int \frac{y_2(x)}{W(x)} R(x) dx \\ + y_2(x) \int \frac{y_1(x)}{W(x)} R(x) dx$$

Para obtener $w(x)$, podemos utilizar la identidad (8) de Abel

$$w(x) = C e^{-\int P(x) dx}$$

En este caso, como $P \equiv 0$, obtenemos $w \equiv C$, donde podemos obtener C evaluando en 0.

$$W(0) = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(0) & \overset{0}{\sin(0)} \\ -\overset{0}{\sin(0)} & \cos(0) \end{vmatrix} = 1$$

Así, $w \equiv 1$. Ahora, como $R(x) = \tan(x)$, podemos obtener que

~~$$A(x) = - \int \frac{\cos(x)}{1} \tan(x) dx = - \int \sin(x) dx = \cos(x)$$~~

~~$$B(x) = + \int \frac{\sin(x)}{1} \tan(x) dx = \int \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} dx$$~~

$$A(x) = - \int \frac{\sin(x)}{1} \tan(x) dx = + \int \frac{-\sin^2(x)}{\cos(x)} dx$$

$$= \int \frac{\cos^2(x) - 1}{\cos(x)} dx = \int \cos(x) dx - \int \sec(x) dx$$

$$= \sin(x) - \log(\sec(x) + \tan(x))$$

$$B(x) = \int \frac{\cos(x)}{1} \tan(x) dx = \int \sin(x) dx = -\cos(x)$$

Por lo que la sol. general es:

$$y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + \cos(x) (\cancel{\sin(x)} - \log(\sec(x) + \tan(x))) \\ + \sin(x) (\cancel{-\cos(x)})$$