

P2 (fórmula de Abel) Supongamos una ecuación de tipo

$$y'' + P(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

y sean y_1, y_2 soluciones de (1). Consideremos

$$W(x) = y_1 y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

Encontramos una ecuación para $W(x)$.

sol. vemos que

$$\begin{aligned} W'(x) &= (y_1 y_2' - y_1' y_2)' \\ &= (y_1' y_2' + y_1 y_2'') - (y_1'' y_2 + y_1' y_2') \\ &= (\cancel{y_1' y_2'} + y_1 (-P y_2' - q y_2)) - ((-P y_1' - q y_1) y_2 + \cancel{y_1' y_2'}) \\ &= P(y_1' y_2 - y_1 y_2') - q y_1 y_2 + q y_1 y_2 \\ &= -P(x) W(x). \end{aligned}$$

Es decir, $W(x)$ satisface

$$W'(x) = -P(x) W(x)$$

de esto, sale que

→ si $W(x_0) = 0$, entonces $W \equiv 0$.

→ si $W(x_0) \neq 0$, entonces (por variables separables se deduce que)

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^x P(s) ds\right)$$

De donde $w(x) \neq 0$.

Es decir, soluciones LI en algún punto son siempre LI. Y lo mismo para LD. II

②

P2 (Reducción de orden) consideramos la misma EDO

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1).$$

De la que conocemos $y_1(x)$ solución.

a) Definiendo $y_2(x) = u(x)y_1(x)$, encuentre ecuación para $u(x)$.

Sol: sea entonces:

$$y_2(x) = u(x)y_1(x)$$

$$y_2'(x) = u'(x)y_1(x) + u(x)y_1'(x)$$

$$y_2''(x) = u''(x)y_1(x) + 2u'(x)y_1'(x) + u(x)y_1''(x)$$

$$y_2 = u y_1$$

$$y_2' = u' y_1 + u y_1'$$

$$y_2'' = u'' y_1 + u' y_1' + u' y_1' + u y_1''$$

$$= u'' y_1 + 2u' y_1' + u y_1''$$

$$= u'' y_1 + 2u' y_1' + u(-p y_1' - q y_1)$$

Imponiendo y_2 solución, se obtiene,

$$u'' y_1 + 2u' y_1' + u(-p y_1' - q y_1) + p(u' y_1 + u y_1') + q u y_1 = 0$$

$$\Rightarrow u'' y_1 + 2u' y_1' + P u' y_1 = 0 \quad (3)$$

$$\Rightarrow y_1 u'' + (2y_1' + P y_1) u' = 0 \quad (V = u')$$

$$\Rightarrow y_1 V' + (2y_1' + P y_1) V = 0 \quad (\cdot \frac{1}{y_1} \rightarrow \neq 0)$$

$$\Rightarrow V' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + P \right) V = 0$$

$$\Rightarrow \frac{V'}{V} = -\frac{2y_1'}{y_1} + P$$

~~$$\Rightarrow \ln\left(\frac{V(x)}{V(x_0)}\right) = -2 \ln\left(\frac{y_1(x)}{y_1(x_0)}\right) - \int P(s) ds$$~~

$$\Rightarrow \ln(V) = -2 \ln(y_1) - \int P(s) ds$$

$$\Rightarrow \ln(V y_1^2) = - \int P(s) ds$$

$$\Rightarrow V y_1^2 = \exp(- \int P(s) ds)$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{y_1^2} \exp(- \int P(s) ds)$$

$$\Rightarrow u(x) = \int \frac{1}{y_1^2(x)} \exp(- \int P(s) ds) dx$$

Ejemplo: Tenemos la ecuación

$$x^2 y''(x) - 3x y'(x) + 4y(x) = 0 \quad (2)$$

en que sabemos que $y_1(x) = x^2$ es solución. En efecto:

$$x^2 \cdot 2 - 3x \cdot 2x + 4x^2 = 2x^2 - 6x^2 + 4x^2 = 0. \checkmark$$

Identifícanos entonces:

(4)

$$x^2 y''(x) - 3x y'(x) + 4y(x) = 0$$

$$\Rightarrow y''(x) - \frac{3}{x} y'(x) + \frac{4}{x^2} y(x) = 0$$

$$\hookrightarrow p(x) = -\frac{3}{x} \quad \hookrightarrow q(x) = \frac{4}{x^2}$$

Es decir, si hacemos $y_2(x) = u(x) y_1(x)$
 $= u(x) x^2$, sabemos que

$$-\int p(s) ds = 3 \int \frac{1}{s} ds = 3 \ln(s) = \ln(s^3)$$

$$\Rightarrow \exp(-\int p(s) ds) = s^3. \quad \text{de modo que}$$

$$u(x) = \int \frac{1}{y_1^2(x)} x^3 dx = \int \frac{x^3}{x^4} dx$$

$$= \int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$$

Por lo que obtenemos que $y_2(x) = \ln(x) x^2$ es solución de la EDO (2).

P3) consideramos de nuevo la ecuación

$$x^2 y''(x) - 3x y'(x) + 4y(x) = 0$$

(5)
(2)

consideramos $x = e^z \rightarrow \frac{dx}{dz} = e^z \rightarrow \frac{dz}{dx} = e^{-z}$

veremos así que

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} e^{-z}$$

$$y''(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dz} e^{-z} \right) = \frac{d}{dz} \left(\frac{dy}{dz} e^{-z} \right) \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$= \left(\frac{d^2 y}{dz^2} e^{-z} - \frac{dy}{dz} e^{-z} \right) e^{-z}$$

$$= e^{-2z} \left(\frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} \right)$$

luego, reemplazando en (2) obtenemos

$$x^2 e^{-2z} \left(\frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} \right) - 3x e^{-z} \frac{dy}{dz} + 4y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dz^2} - 4 \frac{dy}{dz} + 4y = 0 \quad \left(\text{Edo lineal de coef. ctes} \right)$$

Haciendo polinomio característico, se obtiene la ecuación

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)^2 = 0.$$

por lo que las soluciones son

$$y_1^k(z) = e^{-2z} = (e^z)^{-2} = x^2$$

$$y_2(z) = z e^{-2z} = \ln(x) x^2$$

calzan con las anteriores ∇
0.