

P1] consideremos una ec. diferencial que se puede escribir en la forma (1)

$$y' = P(x) F(y) + Q(x) G(y) \quad (1)$$

supongamos además que F, G son tdes qe

$$\frac{F \cdot G' - G F'}{G}$$
 es constante.

Encuentre un cambio de variable adecuado que permita transformar (1) a una ecuación lineal.

sol: pensando en la regla del cociente, definimos

$$u(x) = \frac{F(y(x))}{G(y(x))}$$

entonces

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{F'G - FG'}{G^2} \cdot y'(x)$$

$$= \frac{F'G - FG'}{G^2} (P(x) F(y) + Q(x) G(y))$$

$$= \frac{-C}{G(y)} (P(x) F(y) + Q(x) G(y))$$

$$= -C P(x) u(x) - C Q(x)$$

con el cambio $u = \frac{F}{G}$, la ecuación (1) se transforma en la ecuación lineal

$$u' = -C P(x) u - C Q(x) \quad \square$$

a) Describa un método para resolver la ecuación de Bernoulli:

②

$$y'(x) = P(x)y + Q(x)y^m$$

sol: vemos que se puede identificar

$$F(y) = y, \quad G(y) = y^m.$$

$$F'(y) = 1, \quad G'(y) = my^{m-1}.$$

en que

$$\frac{F G' - G F'}{G} = \frac{y \cdot m y^{m-1} - y^m \cdot 1}{y^m} = \frac{(m-1)y^m}{y^m} = m-1 \text{ (cte).}$$

Entonces, con el cv $u = \frac{F}{G} = \frac{y}{y^m} = y^{1-m},$

nos queda la ecuación

$$u'(x) = -(m-1)P(x)u - cQ(x)$$

la cual se resuelve mediante factor de integración como fue visto en clases.

P2] Consideremos una ecuación diferencial del tipo (3)

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Describa cómo resolver esta ecuación mediante el cambio de variables $y(x) = v(x) \cdot x$.

Sol: vemos que:

$$y(x) = v(x) \cdot x \quad \bigg/ \quad \frac{d}{dx}$$

$$\Rightarrow y'(x) = v'(x) \cdot x + v(x)$$

$$\Rightarrow v'(x)x + v(x) = f(v(x))$$

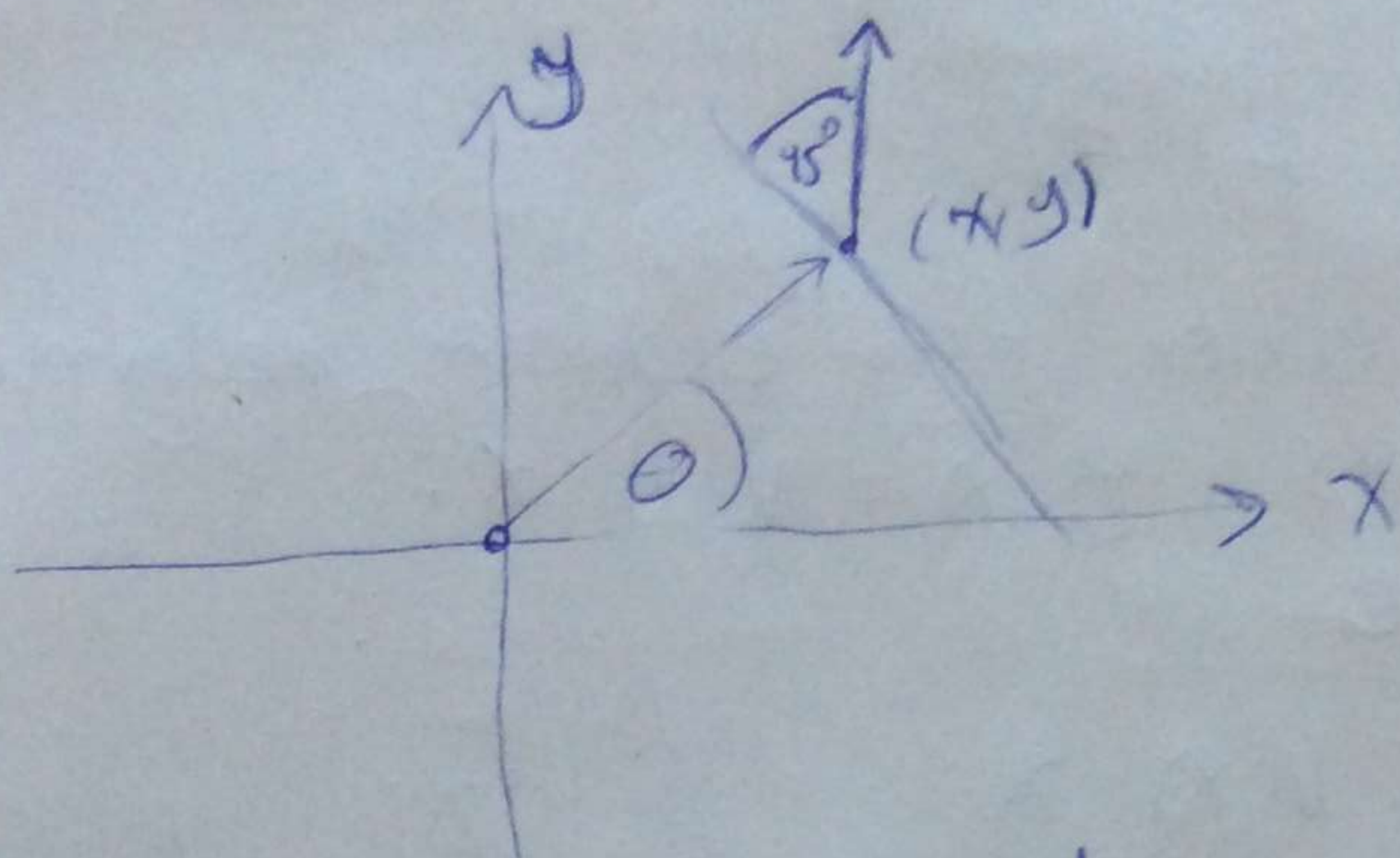
$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} \cdot \frac{1}{f(v(x)) - v(x)} = \frac{1}{x}$$

(variables separables!)

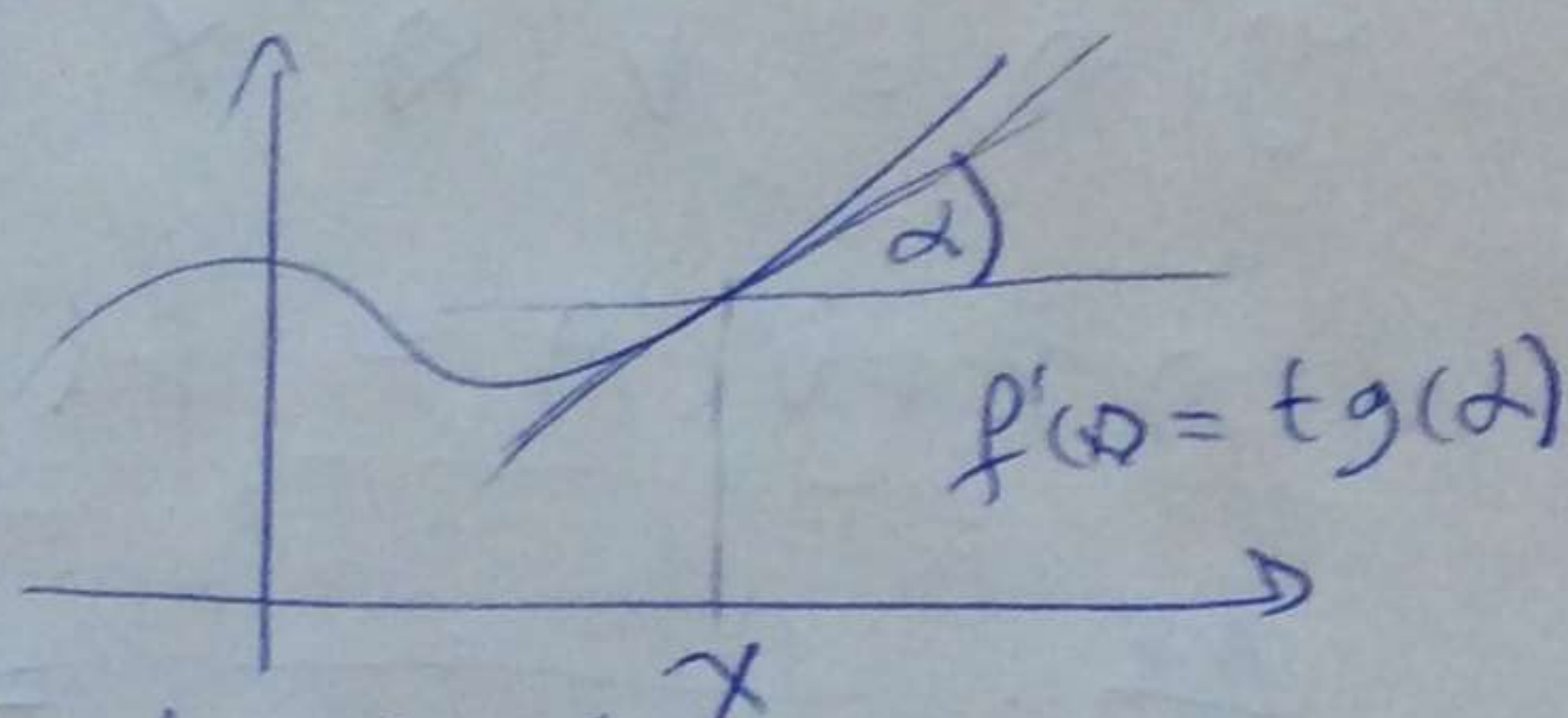
Entonces esta ecuación se puede resolver mediante integración como fue visto en clases.

P31

(4)



Sol: Recordemos que las derivadas y los ángulos tienen la sgte relación:



Entonces, para (x, y) parte de la trayectoria, esperamos que se cumpla

$$y'(x) = \operatorname{tg}(\theta + 45^\circ)$$

en que sabemos que $\operatorname{tg}(\theta) = \frac{y}{x}$ y $\operatorname{tg}(45^\circ) = 1$, por lo que usando id. trigonométrica, tenemos

$$y'(x) = \operatorname{tg}(\theta + 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg}(\theta) + \operatorname{tg}(45^\circ)}{1 - \operatorname{tg}(\theta) \operatorname{tg}(45^\circ)} = \frac{1 + y/x}{1 - y/x}$$

veamos que esta ecuación es del tipo

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

en que $f(t) = \frac{1+t}{1-t}$. Por lo que haciendo $y = v(x) \cdot x$

obtenemos la ec. de variable separable

⑤

$$V'(x) \cdot \frac{1}{\frac{1+V}{1-V} - V} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1-V}{1+V - V(1-V)} V' = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1-V}{1+V^2} V' = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1-V}{1+V^2} dV = \ln|x| + C$$

Recordamos que

$$\int \frac{1-V}{1+V^2} dV = \int \frac{1}{1+V^2} dV - \frac{1}{2} \int \frac{2V}{1+V^2} dV$$

$$= \arctg(V) - \frac{1}{2} \ln(1+V^2) + C.$$

Por lo que,

$$\arctg(V) - \frac{1}{2} \ln(1+V^2) + C = \ln|x| \quad (V = \frac{y}{x})$$

$$\Rightarrow \arctg\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) + C = \ln|x|$$

$$\Rightarrow \arctg\left(\frac{y}{x}\right) + C = \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) + \frac{1}{2} \ln(x^2)$$

$$\Rightarrow \arctg\left(\frac{y}{x}\right) + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \quad (\exp(\cdot))$$

$$C e^{\arctg(\frac{y}{x})} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

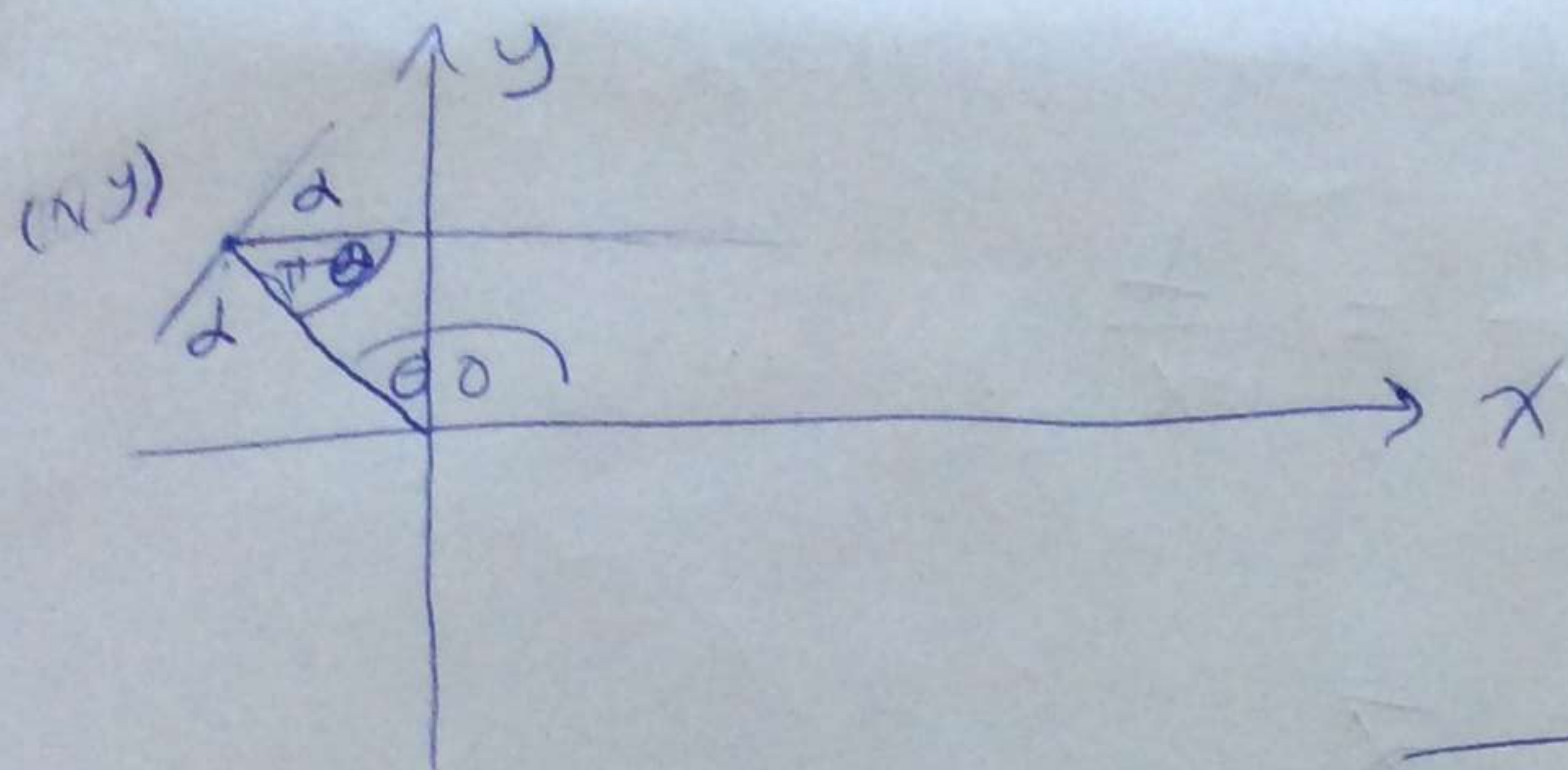
En Polares:

$$C e^{\theta} = r$$

□

P41

⑥



queremos $2\alpha + \pi - \theta = \pi \Rightarrow \boxed{\theta = 2\alpha}$

Además, sabemos que

$$y'(x) = 2x$$

$$\frac{y}{x} = \tan(\theta)$$

Entonces, reemplazando, obtenemos

$$\frac{y}{x} = \tan(\theta) = \tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)} = \frac{2 y'(x)}{1 - (y'(x))^2}$$

$$\Rightarrow y(1 - (y')^2) = 2xy' \Rightarrow y \cdot (y')^2 + 2xy' - y = 0$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2 + 4y^2}}{2y}$$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{y} \cdot \frac{1/x}{1/x}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + (y/x)^2}}{y/x} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\text{Con } f(t) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + t^2}}{t}$$

según lo visto en P2, hacemos entonces $y = V(x) \cdot x$ y obtenemos la ecuación

(7)

$$\frac{1}{\frac{-1 \pm \sqrt{1+V^2}}{V} - V} \cdot \frac{dV}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{V}{-1 \pm \sqrt{1+V^2} - V^2} \cdot V'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{V}{-V^2 - 1 \pm \sqrt{1+V^2}} \cdot V'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow - \int \frac{V}{V^2 + 1 \pm \sqrt{1+V^2}} dV = \ln|x| + C$$

En que haciendo $u^2 = V^2 + 1 \Rightarrow V = \sqrt{u^2 - 1}$ y $dV = \frac{u}{u} du$ obtenemos

$$\int \frac{V}{V^2 + 1 \pm \sqrt{1+V^2}} dV = \int \frac{u}{u^2 \pm u} du = \int \frac{1}{u \pm 1} du$$

$$= \ln|u \pm 1| \text{ por lo que:}$$

$$- \ln(u \pm 1) = \ln(x) + C$$

$$\Rightarrow \ln(x) + C = -\ln(\sqrt{V^2 + 1} \pm 1) = -\ln\left(\sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1} \pm 1\right)$$

$$\Rightarrow \ln\left(x \cdot \left(\sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1} \pm 1\right)\right) = C$$

$$\Rightarrow x \left(\sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1} \pm 1\right) = C$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = c \pm x$$

②

$$\rightarrow x^2 + y^2 = c^2 \pm 2cx + x^2$$

$$\Rightarrow y^2 = \pm 2cx + c^2 \quad \square \quad (\text{Parabolas})$$