Auxiliar 13

Preparación C3 y Examen

Profesor: Ricardo Carlos Freire
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Nos proponemos resolver la ecuación en derivadas parciales no homogénea siguiente

$$(*) = \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 1, & x \in (0, \pi/2),\ t > 0, \\ u(0,t) = 1, u_x(\pi/2, t) = -\pi/2, & \\ u(x,0) = -x^2 + \frac{1}{2}\pi x, u_t(x,0) = 0, & x \in (0, \pi/2). \end{cases}$$

a) Considerando el cambio de variable $w(x,t) = u(x,t) + f(x)$, donde u es solución del sistema anterior; determine f tal que w es solución de

$$(**) = \begin{cases} w_{tt} = w_{xx}, & x \in (0, \pi/2),\ t > 0, \\ w(0,t) = 0, w_x(\pi/2, t) = 0, & \\ w(x,0) = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\pi x - 1, w_t(x,0) = 0, & x \in (0, \pi/2). \end{cases}$$

b) Pruebe que si $w(x,t) = M(x)N(t)$, entonces M verifica

$$\begin{cases} M''(x) + \lambda M(x) = 0, \\ M(0) = 0, \\ M'(\pi/2) = 0. \end{cases}$$

Además, pruebe que para $\lambda_n = (2n+1)^2$ se obtienen las soluciones no triviales de la forma $M_n(x) = \sin((2n+1)x)$ con $n \geq 0$.
Indicación: Analice los casos $\lambda = 0$, $\lambda < 0$, $\lambda > 0$.

c) (1.0 puntos) Use λ_n del ítem anterior para concluir que w tiene la forma

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos((2n+1)t) + B_n \sin((2n+1)t)] \sin((2n+1)x).$$

Indicación: Determine la forma general de $N(t)$ para dicho valor λ_n.

d) Use la condición $w(x,0) = -\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{2}x - 1$ para determinar A_n; y use que $w_t(x,0) = 0$ para concluir que $B_n = 0$ para todo $n \geq 0$. **Integrales útiles:**

$$\int x \sin(x)\, dx = \sin(x) - x\cos(x) + C$$

$$\int x^2 \sin(x)\, dx = -x^2 \cos(x) + 2\cos(x) + 2x \sin(x) + C$$

e) Determine la solución del sistema $(*)$.

Pregunta 2

Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & x \in [-\pi, 0[\\ \frac{1}{2}, & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

(a) Calcule la serie de Fourier de f.

(b) Use la identidad de Parseval para calcular

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

(c) Indique a qué converge la serie de Fourier para $x = 0$.

(d) Sea $S_N(x)$ la suma parcial enésima de la serie de Fourier de f, para $N = 2n + 1$ impar, es decir:

$$S_N(x) = \frac{2}{\pi}\left[\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \cdots + \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}\right].$$

Muestre que:

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{\sin(2(N+1)u)}{\sin(u)}\, du.$$

Ayuda: Use que $\frac{\sin(ku)}{k} = \int_0^x \cos(ku)\, du$ y la identidad trigonométrica $\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$.

(e) Pruebe que el primer máximo local de S_N en $(0, \pi)$ es $x_N = \frac{\pi}{2(N+1)}$.

Pregunta 3

Calcule la siguiente integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + 2x + 4} dx$$