P1

$$(P)=\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 & (EQ)\\ u(r,-\pi)=u(r,\pi)\\ u_\theta(r,-\pi)=u_\theta(r,-\pi)\\ u(1,\theta)=1+3\sin(\theta)-\sin^4(\theta) & \theta\in(-\pi,\pi) \end{cases}$$

la región a resolver es el complemento del disco $x^2+y^2<1$
$\Rightarrow r\in[0,\infty]$. Aplicamos separación de variables:

$$u(r,\theta)=R(r)\varphi(\theta)$$

Reemplazando en EQ:

$$R''\varphi+\frac{1}{r}R'\varphi+\frac{1}{r^2}\varphi''R=0$$

$\frac{r^2}{R\varphi}$

$$\frac{r^2R''}{R}+r\frac{R'}{R}+\frac{\varphi''}{\varphi}=0$$

$$\underbrace{r^2\frac{R''}{R}+r\frac{R'}{R}}_{\text{Sólo depende de } r}=\underbrace{-\frac{\varphi''}{\varphi}}_{\text{Sólo depende de } \theta}=k^2$$

cte de separación (se elige positiva ya que se esperan sols armónicas para el ángulo por las CB)

Resolvamos las EDOS que resultan de agregar la cte de separación:

1) $-\frac{\varphi''}{\varphi}=k^2 \Rightarrow \boxed{\varphi''+k^2\varphi=0}$

oscilador armonico, sol conocida

Para cte de sep $=-k^2$ la sol φ es exponencial, no obstante no se pueden satisfacer las CB ya que la exp real no es periodica

$$\varphi(\theta)=A\cos(k\theta)+B\sin(k\theta) \quad k>0$$

($\varphi_0(\theta)=A\theta+B$ si $k=0$)

2) $\frac{r^2R''}{R}+r\frac{R'}{R}=k^2$

$$\Rightarrow \boxed{r^2R''+rR'-k^2R=0}$$

ec diferencial de Euler Cauchy (solución "conocida")

Propongamos solución del tipo $R(r) = r^{\lambda}$ (indicación) veamos si funciona:

$$r^2 (r^{\lambda})'' + r(r^{\lambda})' - k^2 r^{\alpha} = 0$$

$$\cancel{r^2} \lambda(\lambda-1) \cancel{r^{\lambda-2}} + \cancel{r} \lambda \cancel{r^{\lambda-1}} - k^2 \cancel{r^{\lambda}} = 0$$

$$\boxed{\lambda(\lambda-1) + \lambda - k^2 = 0}$$ ec polinomica para λ

$$\lambda^2 \cancel{-\lambda} + \cancel{\lambda} - k^2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \pm k}$$

Solución general será combinación lineal de las sol propuesta para los λ's encontrados:

$$R(r) = C r^{k} + D r^{-k} \qquad k>0$$

Ahora para el caso $k=0$, la EDO asociada tiene diferente solución:

$$r^2 R_0'' + r R_0' = 0$$

$$\frac{R_0''}{R_0'} = -\frac{1}{r}$$

$$\int \frac{dR_0'}{R_0'} = -\int \frac{dr}{r} + C$$

$$\ln(R_0') = -\ln(r) + C$$

$$R_0' = C e^{\ln(\frac{1}{r})}$$

$$R_0' = C \frac{1}{r}$$

$$R_0 = C \int \frac{1}{r} dr + D$$

$$R_0(r) = C \ln(r) + D$$

Teniendo $R(r)$ y $\varphi(\theta)$ imponemos CB para ver la forma de k:

$\boxed{k>0}$

CB1 $\quad u(r,\pi)=u(r,-\pi)$

$$\Rightarrow \cancel{R(r)}\varphi(\pi)=\cancel{R(r)}\varphi(-\pi) \quad \forall r\in[1,\infty)$$

$$A\cos(k\pi)+B\sin(k\pi)=A\underbrace{\cos(-k\pi)}_{\substack{=\cos(k\pi)\\ \text{ya que es par}}}+B\underbrace{\sin(-k\pi)}_{\substack{=-\sin(k\pi)\\ \text{ya que es impar}}}$$

$$\cancel{A\cos(k\pi)}+B\sin(k\pi)=\cancel{A\cos(k\pi)}-B\sin(-k\pi)$$

$$2B\sin(k\pi)=0$$

$$\boxed{\Rightarrow B=0 \ \vee \ \sin(k\pi)=0}$$

Veamos CB para la derivada para no ponernos en casos al tiro:

$k>0$ CB2 $\quad u_\theta(r,\pi)=u_\theta(r,-\pi)$

$$\varphi'(\pi)=\varphi'(-\pi)$$

$$-Ak\sin(k\pi)+\cancel{Bk\cos(k\pi)}=Ak\sin(k\pi)+\cancel{Bk\cos(k\pi)}$$

$$2kA\sin(k\pi)=0$$

$$\boxed{A=0 \ \vee \ \sin(k\pi)=0}$$

Tomando el caso más general, es decir $A,B\neq 0$ y $\sin(k\pi)=0$:

$$\sin(k\pi)=0$$

$$k\cancel{\pi}=n\cancel{\pi} \quad n\geq 1$$

$$\boxed{k=n}$$

Para $k=n=0$:

$$\varphi_0(\theta)=A\theta+B$$

CB1 $\quad \varphi_0(\pi)=A\pi+\cancel{B}=-A\pi+\cancel{B}=\varphi_0(-\pi)$

$$\Rightarrow \boxed{A=0}$$

CB2 $\quad \varphi_0'(\pi)=0=0=\varphi_0'(-\pi)$

$\Rightarrow \varphi_0(\theta)=cte \quad k=0$

Este caso se puede recoger permitiendo $n\geq 0$ en:

$$\boxed{\varphi(\theta)=A\cos(n\theta)+B\sin(n\theta)} \quad n\geq 0$$

Por lo tanto la solución general es (redefiniendo ctes de EDOS):

$$u(r,\theta)= \underbrace{\tilde{A}\ln(r)+\tilde{B}}_{\substack{\text{para } n=0 \\ (R_0 \Psi_0)}}+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tilde{a}_n\cos(n\theta)+\tilde{b}_n\sin(n\theta)\right)\left(\frac{1}{r}\right)^n}_{\text{para } n\geq 1 \ (R_n\Psi_n)}$$

Sólo faltan por determinar las ctes $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{a}_n$ y $\tilde{b}_n$. Esto lo haremos con la CB que falta:

$$u(1,\theta)=\overbrace{1+3\sin(\theta)-\sin^4(\theta)}^{f(\theta)}$$

Reescribamos $\sin^4(\theta)$ (para ocupar ortogonalidad e igualdad termino a termino).

$$\begin{aligned}\sin^4(\theta)&=\left(\sin^2\theta\right)^2\\ &=\left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)^2\\ &=\frac{1-2\cos(2\theta)+\cos^2(2\theta)}{4}\\ &=\frac{1-2\cos(2\theta)+\frac{1+\cos(4\theta)}{2}}{4}\\ &=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cos(4\theta)\end{aligned}$$

Ahora si:

$$f(\theta)=u(1,\theta)=\tilde{A}\cancelto{0}{\ln(1)}+\tilde{B}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tilde{a}_n\cos(n\theta)+\tilde{b}_n\sin(n\theta)\right)\cancelto{1}{\left(\frac{1}{1}\right)^n}$$

$$f(\theta)=\underbrace{\tilde{B}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tilde{a}_n\cos(n\theta)+\tilde{b}_n\sin(n\theta)\right)}_{\text{serie de Fourier de } f(\theta)}$$

Expandiendo $f(\theta)$ e igualando termino a termino (se puede hacer por ortogonalidad de fns $\{\sin(n\theta)\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{\cos(n\theta)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$1+3\sin(\theta)-\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{1}{8}\cos(4\theta)\right)=\tilde{B}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tilde{a}_n\cos(n\theta)+\tilde{b}_n\sin(n\theta)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{5}{8}+3\sin(\theta)+\frac{1}{2}\cos(2\theta)-\frac{1}{8}\cos(4\theta)=\tilde{B}+b_1\sin(\theta)+a_2\cos(2\theta)+a_4\cos(4\theta)$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\begin{aligned}\tilde{B} &= 5/8 \\ \tilde{b}_1 &= 3 \\ \tilde{a}_2 &= 1/2 \\ \tilde{a}_4 &= -1/8\end{aligned}}$$

todo el resto son 0

Quedando una sol general igual a:

$$u(r,\theta) = \tilde{A}\ln(r) + \frac{5}{8} + 3\sin(\theta)r^{-1} + \frac{1}{2}\cos(2\theta)r^{-2} - \frac{1}{8}\cos(4\theta)r^{-4}$$

A esto en electro se le llama expansión multipolar

P_2

$$(P) = \begin{cases} \Delta u = 0 & \forall x \in \mathbb{R}\ \forall y > 0 \quad (EQ) \\ u(x,0) = f(x) & \forall x \in \mathbb{R} \quad (CB) \\ \lim\limits_{y \to \infty} |u(x,y)| < \infty & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

a) Aplicando TF c/r a x con y fijo:

$$\widehat{u_{xx} + u_{yy}}(s,y) = 0$$

TF lineal

$$\widehat{u_{xx}}(s,y) + \widehat{u_{yy}}(s,y) = 0$$

$$\widehat{\frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x)}(s) = (is)^n \hat{f}(s)$$

$$(is)^2 \hat{u}(s,y) + \hat{u}_{yy}(s,y) = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2}{dy^2}\hat{u}(s,y) - s^2 \hat{u}(s,y) = 0}$$

EDO para variable y

Polinomio característico de la EDO

$$\lambda^2 - s^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{s^2}$$

$$= \pm |s|$$

$$\Rightarrow \hat{u}(s,y) = A(s)e^{|s|y} + B(s)e^{-|s|y}$$

b) Imponiendo CB $u(x,0)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$ y aplicando TF

$$\hat{u}(s,0)=f(x)$$

$$A(s)\cancel{e^{|s|0}}_{1}+B(s)\cancel{e^{-|s|0}}_{1}=\hat{f}(s)$$

$$\boxed{A(s)+B(s)=\hat{f}(s)}$$

Y como $\lim\limits_{y\to\infty}|u(x,y)|<\infty \overset{F}{\Rightarrow} \lim\limits_{y\to\infty}|\hat{u}(s,y)|<\infty\ \forall s\in\mathbb{R}$

$$\lim_{y\to\infty}\left|\underbrace{A(s)e^{|s|y}}_{\text{término diverge para } y\to\infty}+\underbrace{B(s)e^{-|s|y}}_{\text{se va a } 0}\right|<\infty\quad \forall s\in\mathbb{R}$$

Por lo que necesariamente $A(s)=0$. Y por lo tanto:

$$B(s)=\hat{f}(s)$$

$$\Rightarrow \hat{u}(s,y)=\hat{f}(s)e^{-|s|y}$$

c) Para hallar $u(x,y)$ simplemente se antitransforma. Un tip útil para estos casos es utilizar el teorema de convolución:

$$\boxed{\widehat{(f*g)(x)}(s)=\hat{f}(s)\,\hat{g}(s)}$$

Teo de convolución

Si $\hat{g}(s,y)=e^{-|s|y}$, entonces

$[\ ]^{\vee}(x)$ antiTF

$$\hat{u}(s,y)=\hat{f}(s)e^{-|s|y}=\widehat{(f*g)(x)}(s)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$u(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f*g)(x)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(f*[\hat{g}(s)]^{\vee}\right)(x)$$

$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(x-t)\,dt$

definición convolución

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,[\hat{g}(s)]^{\vee}(x-t)\,dt$$

Ahora solo necesitamos la antiTF de $\hat{g}(s,y)$:

$$g(x-t) = \left[\hat{g}(s,y)\right]^{\vee}(x-t) = \left[e^{-|s|y}\right]^{\vee}(x-t)$$

ver aux 10 P1 (a) $(y>0)$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{(x-t)^2+y^2}$$

Reemplazando más arriba:

no depende de t

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\cancel{2}\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sqrt{\frac{\cancel{2}}{\pi}} \frac{y}{(x-t)^2+y^2}\, dt$$

$$\boxed{= \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{(x-t)^2+y^2}\, dt}$$