

Auxiliar 12

Métodos de resolución de EDP's

Profesor: Ricardo Carlos Freire
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Considere la ecuación de Schrödinger unidimensional para una partícula libre con condición inicial

$$(P) \begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m} \psi_{xx}(x, t) = i\hbar \psi_t(x, t) \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x) \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}$$

- a) Obtenga una solución general de la ecuación.
- b) Considere por último que $\psi_0(x, t) \propto e^{-\pi x^2}$ y que $|\psi|^2$ mide la probabilidad de encontrar a la partícula, lo que implica que la solución debe cumplir la condición de normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

Escriba la solución explícita de $\psi(x, t)$ en este caso.

Pregunta 2

Nos proponemos resolver la siguiente EDP

$$(*) \begin{cases} u_t - u_{xx} + \frac{1}{1+t}u = 0, & x \in (0, 2); t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(2, t) = 0, & \forall t > 0 \end{cases}$$

con condición inicial

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

- a) Pruebe que si u es solución no nula de (*) de la forma $u(x, t) = M(x)N(t)$ entonces M verifica

$$(1) = \begin{cases} M''(x) + \lambda M(x) = 0 \\ M'(0) = M'(2) = 0 \end{cases}$$

Y que N verifica

$$(2) \quad N'(t) + \left(\lambda + \frac{1}{1+t} \right) N(t) = 0$$

donde λ es constante.

- b) Pruebe que el problema (1) tiene soluciones no nulas cuando $\lambda = 0$ y $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2$. Y que en dichos casos las soluciones son

$$M(x) = \text{cte}$$

$$M_n(x) = A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

respectivamente, donde $n \geq 1$ y A_n es constante.

- c) Determine $N(t)$ para los valores de $\lambda = 0$ y λ_n del item anterior.

Indicación: Debe resolver un par de EDO's mediante separación de variables. No considere constantes a la hora de integrar, ya que se pueden agrupar en las constantes de la solución del item anterior.

- d) Use los items anteriores para mostrar que la solución general de la ecuación diferencial parcial tiene la forma

$$u(x, t) = \frac{A_0}{1+t} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{1}{1+t} \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 t\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

Finalmente use la condición inicial $u(x, 0)$ para determinar A_0 y A_n ; y así hallar la solución explícita con coeficientes determinados.

Pregunta 3

Resuelva, usando transformada de fourier la ecuación de ondas

$$(P) \begin{cases} u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in \mathbb{R} \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix}$$