P3

a) La EDP a resolver es:

$$\begin{array}{ll} \text{EDC} & \nabla^2 V = 0 \\ \text{C.B (1)} & V(x,0)=V(x,a)=0 \\ \text{C.B (2)} & V(0,y)=V_0(y) \\ \text{C.B (3)} & V(x\to\infty,y)=0 \end{array}$$

Utilizando separación de variables en EDC $V(x,y)=X(x)\,Y(y)$:

$$(\partial_{xx}+\partial_{yy})X(x)Y(y)=0$$

$$Y(y)\,X''(x)+X(x)\,Y''(y)=0$$

$$\frac{X''(x)}{X}+\frac{Y''(y)}{Y}=0$$

Lo que sólo es posible si $\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=cte$. La elección de la naturaleza de esta cte ($\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-, \mathbb{C}$, etc) dependerá de las C.B y que tenga sentido físico la solución. Sea $cte=k$:

$$-\frac{Y''}{Y}=k \Rightarrow \underbrace{Y''+kY=0}_{\text{polinomio característico}}$$ EDO 2^{do} orden

$$\lambda^2+k=0$$

$$\lambda^2=-k \Rightarrow \lambda_1=\sqrt{-k} \wedge \lambda_2=-\sqrt{-k}$$

Por lo que la solución es:

$$Y(y)=A\,e^{\sqrt{-k}\,y}+B\,e^{-\sqrt{-k}\,y}$$

No obstante no hemos dicho nada sobre la naturaleza de k ya que bien podría ser negativa y la sol cambia a ser oscilatoria. Para elegir un signo para k (y comportamiento de la solución) vemos C.B:

$$Y(0)=0=A+B \Rightarrow A=-B$$

$$Y(a)=0=Ae^{\sqrt{-k}a}+Be^{-\sqrt{-k}a}$$

$$=A\left(e^{\sqrt{-k}a}-e^{-\sqrt{-k}a}\right)=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{A=0}_{\substack{\text{lleva a } Y(y)=0\\ \text{sol trivial,}\\ \text{se descarta}}} \ \vee\ \underbrace{e^{\sqrt{k}a}-e^{-\sqrt{k}a}=0}_{\substack{\text{solo posible para}\\ k>0 \text{ tq}}}$$

$$e^{i\sqrt{k}a}-e^{-i\sqrt{k}a}=0$$

$$\frac{1}{2i}\Big\downarrow$$

$$\sin(\sqrt{k}a)=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{k}a=n\pi$$

$$k=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad n\in\mathbb{N}$$

Como $k>0$, $Y(y)$ en los reales se escribe como:

$$Y(y)=A\cos(\sqrt{k}y)+B\sin(\sqrt{k}y)$$

$$\overset{CB}{\Rightarrow}\ Y(0)=A\cos(0)+\cancelto{0}{B\sin(0)}=0 \Rightarrow A=0$$

$$Y(a)=B\sin(\sqrt{k}a)=0 \Rightarrow \text{se recupera } k=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$

Sigue la sol y es:

$$\boxed{Y(y)=B\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)}$$

Ahora la EDO para X:

$$\frac{X''}{X}=k \Rightarrow X''-kX=0$$

$$\Rightarrow X(x)=Ce^{\sqrt{k}x}+De^{-\sqrt{k}x}$$

Imponiendo C.B:

$$X(x\to\infty)=\underbrace{Ce^{\infty}}_{\text{diverge}}+D\cancelto{0}{e^{-\infty}}=0$$

$$\Rightarrow C=0$$

Y la sol para X queda:

$$X(x)=De^{-\sqrt{k}x}=\boxed{De^{-\overset{\substack{\text{de antes}\\ \downarrow}}{\frac{n\pi}{a}}x}}$$

Juntando $V(x,y)=X(x)Y(y)$:

$$\boxed{V(x,y)=Ae^{-\frac{n\pi}{a}x}\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)} \quad n\in\mathbb{N}$$

Por ppio de superposición:

$$\boxed{V(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\frac{n\pi}{a}x}\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)}$$

b) Nos falta una C.B por aplicar:

$$V(0,y) = V_0(y) \equiv V_0$$

$$\Rightarrow \underbrace{V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right)}_{\text{Serie de senos de } V_0}$$

Por tanto los coefs A_n se calculan como:

$$A_n = \frac{2}{a}\int_0^a V_0 \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) dy$$

$$= \frac{2V_0}{a}\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) dy$$

$$= \frac{2V_0}{\cancel{a}}\left(-\frac{\cancel{a}}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{a} y\right)\right)\Bigg|_0^a$$

$$= \frac{2V_0}{n\pi}\left(\cos(0) - \underbrace{\cos\left(\frac{n\pi}{\cancel{a}}\cancel{a}\right)}_{(-1)^n}\right)$$

$$= \frac{2V_0}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right)$$

$$\Rightarrow A_n = \begin{cases} \frac{4V_0}{n\pi} & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}$$

Sigue que la sol general se escribe como:

$$\boxed{V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n \text{ impar}}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{n\pi}{a}x} \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right)}$$

P_1

$$(EDC)\quad \frac{\partial}{\partial t}u(x,t)=a\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)+F(x) \qquad \forall t\geq 0,\ x\in(0,\pi)$$
$$(CB)\quad u(0,t)=u(\pi,t)=0 \qquad \forall t\geq 0$$
$$(CI)\quad u(x,0)=g(x)$$

con $F(x)=\sin(x)+3\sin(4x)-\sin(5x)$ y $g(x)=-\sin(2x)+\sin(4x)$

a) Una solución $u_p(x,t)$ que es cte en el tiempo satisface $\frac{\partial u_p}{\partial t}=0$, y además por ser cte no depende explicitamente del tiempo $(u_p(x))$. Reemplazando en EDC:

$$\cancelto{0}{\frac{\partial u_p}{\partial t}}=a\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_p(x)+F(x)$$

$$u_p''=-\frac{F(x)}{a}$$

$\int dx$

$$u_p'=-\frac{1}{a}\int F(x)dx+A$$
$$u_p'=-\frac{1}{a}\int(\sin(x)+3\sin(4x)-\sin(5x))dx+A$$
$$u_p'=\frac{1}{a}\left(\cos(x)+\frac{3}{4}\cos(4x)-\frac{\cos(5x)}{5}\right)+A$$

$\int dx$

$$\boxed{u(x)=\frac{1}{a}\left(\sin(x)+\frac{3}{16}\sin(4x)-\frac{\sin(5x)}{25}\right)+Ax+B}$$

Veamos (CB):

$$u_p(0,t)=\frac{1}{a}\left(\cancelto{0}{\sin(0)}+\frac{3}{16}\cancelto{0}{\sin(0)}-\frac{\cancelto{0}{\sin(0)}}{25}\right)+\cancelto{0}{A\,0}+B=0$$

$$\boxed{\Rightarrow B=0}$$

$$u_p(0,t)=\frac{1}{a}\left(\cancelto{0}{\sin(\pi)}+\frac{3}{16}\cancelto{0}{(4\pi)}-\frac{\cancelto{0}{\sin(5\pi)}}{25}\right)+A\pi=0$$

$$\boxed{\Rightarrow A=0}$$

$$\boxed{\therefore\ u_p(x)=\frac{\sin(x)}{a}+\frac{3\sin(4x)}{16}-\frac{\sin(5x)}{25}}$$

b) Usando el sgte cambio de variable $u = v + u_p$ y reemplazando en (EDC):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \cancelto{0}{\frac{\partial u_p}{\partial t}} = \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \underbrace{\alpha \frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2}}_{= \cancel{-F(x)}} + \cancel{F(x)}$$

por EDC para u_p

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}$$

ec del calor

La solución para la ecuación del calor con condiciones de borde tipo Dirichlet $(v(0,t) = v(\pi,t) = 0)$ es conocida:

* CB para u y v son iguales ya que $u_p(0,t) = u_p(\pi,t) = 0$

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\cancel{\pi}x}{\cancel{\pi}}\right) e^{-\alpha\left(\frac{k\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}}\right)^2 t}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx) e^{-\alpha k^2 t}$$

No obstante falta por calcular los coefs A_k. Esto lo haremos aplicando la CI, que aún no utilizamos. Evaluando:

$$g(x) = u(x,0) = v(x,0) + u_p(x)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\underbrace{g(x) - u_p(x)}_{h(x)} = v(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx)}_{\text{Serie de senos de } h(x)} \cancelto{0}{e^{-\alpha k^2 0}}$$

En el caso más general, los coefs de una serie de senos se calculan como:

$$A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} h(x) \sin(kx)\, dx$$

Reemplazando con $h(x) = \sin(2x) + \sin(4x) - u_p(x)$ e integrando es posible llegar al resultado, no obstante ese camino es algo engorroso. Una forma más fácil de ver los coefs (que en este caso son finitos) es igualar término a término la serie con la función, pues ambas están compuestas de senos de diferentes frecuencias:

$$-\frac{\sin(x)}{\alpha} - \sin(2x) + \left(1-\frac{3}{16\alpha}\right)\sin(4x) + \frac{\sin(5x)}{25x} = A_1\sin(x) + A_2\sin(x) + A_4\sin(4x + A_5\sin(5x)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\Rightarrow A_1 = -\frac{1}{\alpha}\\ &\Rightarrow A_2 = -1\\ &\Rightarrow A_4 = 1-\frac{3}{16\alpha}\\ &\Rightarrow A_5 = \frac{1}{25\alpha}\end{aligned}}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{v(x,t) = -\frac{1}{\alpha}\sin(x)e^{-\alpha t} + \sin(2x)e^{-4\alpha t} + \left(1-\frac{3}{16\alpha}\right)\sin(4x)e^{-16\alpha t} + \frac{1}{25}\sin(5x)e^{-25\alpha t}}$$

c) Recordamos que $u(x,t) = v(x,t) + u_p(x)$. Reemplazando con lo obtenido:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{\alpha}\sin(x)\left(1-e^{-\alpha t}\right) + \sin(2x)e^{-4\alpha t} + \sin(4x)\left(\left(\frac{3}{16\alpha}-1\right)e^{-\alpha t} + \frac{3}{16\alpha}\right) + \frac{1}{25\alpha}\sin(5x)\left(e^{-25\alpha t}-1\right)}$$

P_2

Se pide resolver

$$(P)\begin{cases} u_t + u - \cos(t)u_{xx} = 0 & x\in(0,1), t>0\\ u(0,t) + u(1,t) = 0 \\ u_x(0,t) = 0 \\ u(x,0) = h(x) \end{cases}$$

donde

$$h(x) = \begin{cases} 0 & 0\leq x\leq 1/2\\ \pi/2 & 1/2 < x \leq 1\end{cases}$$

Aplicando separación de variables $u(x,t)=X(x)T(t)$:

$$\frac{1}{\cos(t)XT}\left(T'X+TX-\cos(t)X''T=0\right.$$

$$\frac{T'}{\cos t\, T}+\frac{1}{\cos t}-\frac{X''}{X}=0$$

$$\underbrace{\frac{1}{\cos t}\left(\frac{T'}{T}+1\right)}_{\text{sólo depende de t}}=\underbrace{\frac{X''}{X}}_{\text{sólo depende de x}}\overset{!}{=}-k^2$$

cte de separación

Caso cte de separación positiva $\Rightarrow X(x)\propto e^{\pm kx}$ no satisface CB $u(0,t)+u(1,t)=0$, se descarta.

Resolviendo las EDO's asociadas:

k>0)

$$\frac{X''}{X}=-k^2\Rightarrow \boxed{X''+k^2X=0}$$

oscilador armonico

$$X(x)=A\cos(kx)+B\sin(kx)$$

Si k=0)

$$X''=0\Rightarrow X(x)=Ax+B$$

No obstante aplicando CB altiro

- $X'(0)=0$ $A=0$
- $X(0)+X(1)=0$ $B+B=0\Rightarrow B=0$

El caso k=0 lleva a la sol trivial por lo tanto no se toma en cuenta (haciendo esto me salto el considerar k=0 para la otra EDO). Resolviendo para T:

$$\frac{1}{\cos t}\left(\frac{T'}{T}+1\right)=-k^2$$

$$\frac{T'}{T}=-k^2\cos t-1$$

$$\int dt \left(\frac{dT}{dt}\frac{1}{T}=-k^2\cos t-1\right.$$

$$\downarrow \int \frac{dT}{T} = -k^2\int \cos t\, dt - \int dt + C$$

$$\ln(T) = -k^2 \sin t - t + C$$

$$\Rightarrow \boxed{T(t) = C e^{-k^2 \sin t - t}} \quad k>0$$

Impongamos CB:

CB1 $u_x(0,t)=0$

$$X'(0)\cancel{T(t)}=0$$

$$-Ak\underset{0}{\cancel{\sin(0)}}+Bk\cos(0)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{B=0}$$

$$\Rightarrow X(x)=A\cos(kx)$$

CB2 $X(0)+X(1)=0$

$$\cancel{A}\underset{1}{\cancel{\cos(0)}}+\cancel{A}\cos(k)=0$$

$$\cos(k)=-1$$

$$\Rightarrow k=2n\pi-\pi$$

$$\boxed{k=\pi(2n-1)} \quad n\geq 1$$

Juntando sols:

$$X(x)T(t)=Ce^{-\pi^2(2n-1)^2\sin t-t}\cos(\pi(2n-1)x),\ n\geq 1$$

Aplicando ppio de superposición

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\pi^2(2n-1)^2\sin t-t}\cos(\pi(2n-1)x)}$$

Falta por aplicar CI $u(x,0)=h(x)$:

$$h(x)=u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{\underset{1}{\cancel{-\pi^2(2n-1)^2\sin(0)-0}}}\cos(\pi(2n-1)x)$$

$$\Rightarrow \boxed{h(x)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n\cos(\pi(2n-1)x)}$$

"especie" de serie de cosenos de $h(x)$

Multiplicando por $\cos(k\pi x)$ e integrando (además $2n-1=n'$):

$$\int_0^1 h(x)\cos(k\pi x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \underbrace{\int_0^1 \cos(n'\pi x)\cos(k\pi x)\,dx}_{=\frac{1}{2}\delta_{n'}^{k} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } n'=k \\ 0 & n'\neq k \end{cases}}$$

Como $k=n'$ únicos términos no nulos de serie, despejando $C_{n'}$

$$\boxed{C_{n'} = 2\int_0^1 h(x)\cos(n'\pi x)\,dx}$$

notamos que se calculan de la misma forma que la extensión par de $h(x)$

Reemplazando explicitamente $h(x)$:

$$c_{n'} = 2\left[\int_0^{1/2} \cancel{\overset{\overset{0}{\parallel}}{h}(\underset{0}{x})\cos(n'\pi x)} + \int_{1/2}^{1} \overset{\overset{\frac{\pi}{2}}{\parallel}}{h}(x)\cos(n'\pi x)\right.$$

$$= \cancel{2}\,\frac{\pi}{\cancel{2}}\int_{1/2}^{1}\cos(n'\pi x)\,dx$$

$$= \frac{\cancel{\pi}}{n'\cancel{\pi}}\sin(n'\pi x)\Big|_{1/2}^{1}$$

$$= \frac{1}{n'}\Big(\underbrace{\cancel{\sin(n'\pi)}}_{0} - \underbrace{\sin\left(n'\frac{\pi}{2}\right)}\Big) \quad n'=2n-1$$

$$-\sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$-\sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\underbrace{\cancel{\sin(n\pi)}}_{0}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \underbrace{\cos(n\pi)}_{\overset{\parallel}{(-1)^n}}\overset{1}{\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}}$$

Por lo tanto la sol final es:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-\pi^2(2n-1)^2\sin t - t}\cos(\pi(2n-1)x)}$$

P3

$$(*)\begin{cases} u_t = u_{xx} & x\in(0,1),\ t>0 \\ u_x(0,t)=0 & t>0 \\ u_x(1,t)=2 & \\ u(x,0)=x^2+1 & x\in(0,1) \end{cases}$$

Considerando el cv

$$u(x,t) = ax^2 + bt + w(x,t)$$

Si $a=1$ y $b=2$ (esto parece trucazo pero se hace con prueba y error en las CB y para que efectivamente sea sol), reemplazando todo el corcho de $u(x,t)$ en $(*)$:

$$u_t = u_{xx}$$

$$\cancel{\overset{2}{b}} + w_t = \cancel{2\overset{1}{a}} + w_{xx}$$ /en esta línea está la razón de pq escogí $b=2$ y $a=1$

$$w_t = w_{xx}$$

También con las CB:

CB1 $\quad u_x(0,t) = 0$

$\Rightarrow \quad \underline{2 \cdot 0 + w_x(0,t) = 0}$

CB2 $\quad u_x(1,t) = 2$

$\cancel{2 \cdot 1} + w_x(1,t) = \cancel{2}$

$\Rightarrow \quad \underline{w_x(1,t) = 0}$

CI $\quad u(x,0) = 0$

$\Rightarrow \quad \cancel{x^2} + w(x,0) = \cancel{x^2} + 1$

En efecto $u(x,t) = x^2 + 2t + w(x,t)$ se transforma en

$$\star \begin{cases} w_t = w_{xx} \\ w_x(0,t) = w_x(1,t) = 0 \\ w(x,0) = 1 \end{cases}$$

Resolviendo $\star$ con sep de variables $w(x,t) = X(x)T(t)$

$$\frac{1}{XT} \Big\downarrow \begin{array}{l} T'X = X''T \\ \dfrac{T'}{T} = \dfrac{X''}{X} = -k^2 \end{array}$$ cte de separación

(Acá voy a ir más rápido pq es más de lo mismo):

$k>0$ 1) $X'' + k^2 X = 0$

$\Rightarrow X(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$

$k=0$ $\quad X''=0$

$\Rightarrow X(x) = Ax + B$ (de las CB se puede sacar que $A=0$ por lo que $X(x)=cte$ y se puede incluir en la sol para $k>0$ por el coseno)

2) $\int \left(\frac{T'}{T} = -k^2 \right.$

$\sim \ln(T) = -k^2 \int dt + C$

$$\Rightarrow \boxed{T = Ce^{-k^2 t}}$$

Aplicamos CB

$$X'(0) = \cancel{-Ak\sin(0)} + Bk\cancel{\cos}(0) = 0$$

$$\Rightarrow B = 0$$

$$X'(1) = -\cancel{Ak}\sin(k) = 0$$

$$\Rightarrow k = n\pi$$

$$X(x) = A\cos(n\pi x), \; n \geq 0$$

Juntando en serie:

$$\boxed{w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\pi x) e^{-(n\pi)^2 t}}$$

Imponiendo CI:

$$w(x,0) = 1 = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\pi x)}_{\text{Serie de cosenos de } 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{a_0}{2} = \int_0^1 dx = 1}$$

$$\Rightarrow a_n = 2\int_0^1 \cos(n\pi x) = \frac{2}{n\pi}\sin(n\pi x)\Big|_0^1$$

$$= 0$$

Sigue que $w(x,t) = 1$. Por lo tanto la sol general es:

$$\boxed{u(x,t) = x^2 + 2t + 1}$$