

Auxiliar 11

Separación de variables

Profesor: Ricardo Carlos Freire

Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Dos placas metálicas, conectadas a tierra ($V = 0$) y paralelas al plano xy , una en $y = 0$ y otra a una distancia $y = a$. El sistema está cerrado de tal modo que se aplica un potencial $V_0(y)$ entre placas.

- a) Proponga una solución para el potencial electrostático $V(x, y)$ entre placas, utilizando separación de variables. Considere que se cumple la ecuación de Laplace y las condiciones de borde planteadas:

$$\begin{cases} \nabla^2 V = 0 \\ V(x, a) = V(x, 0) = 0 & x \in [0, \infty) \\ V(0, y) = V_0(y) & y \in [0, a] \\ V(x \rightarrow \infty, y) = 0 & y \in [0, a] \end{cases} \quad (1)$$

- b) Considere $V(0, y) = V_0$. A partir de esto encuentre los coeficientes asociados a la solución reconociendo que en $x = 0$ V_0 se escribe como una expansión en serie de Fourier.

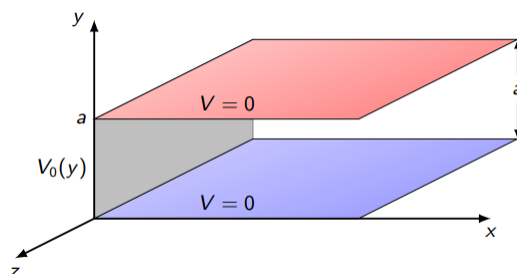


Figura 1: Configuración similar a capacitor, dos placas de metal paralelas al plano xz , una en $y = 0$ y otra en $y = a$. En $x = 0$ las placas están conectadas y cerradas con una tira infinita y aislada de las dos placas la cual mantiene un potencial específico $V_0(y)$.

Pregunta 2

Considere la siguiente EDP con condiciones de borde e inicial dadas por

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + F(x) & \forall t \geq 0, x \in (0, \pi) \\ u(x, 0) = g(x) & x \in (0, \pi) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Con $g(x) = -\sin(2x) + \sin(4x)$ y $F(x) = \sin(x) + 3\sin(4x) - \sin(5x)$.

- Considere una solución constante en el tiempo u_p . Encuentre u_p tal que sea solución a la ecuación diferencial asociada y cumpla las condiciones de borde.
- Se define $u(x, t) = v(x, t) + u_p(x)$. Vea cuál es la ecuación resultante para v y resuélvala.
- Obtenga la solución general para $u(x, t)$.

Pregunta 3

Resolver

$$(P) \begin{cases} u_t + u - \cos(t)u_{xx} = 0 & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(0, t) + (1, t) = 0 & t > 0 \\ u_x(0, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = h(x) & t > 0 \end{cases}$$

donde

$$h(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1/2 \\ \frac{\pi}{2} & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Pregunta 4

Considere

$$(*) \begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in (0, 1), t > 0 \\ u_x(0, t) = 0 & t > 0 \\ u_x(1, t) = 2 & t > 0 \\ u(x, 0) = x^2 + 1 & x \in (0, 1) \end{cases}$$

Pruebe que el cambio de variable (escoja a y b tal que solucione)

$$u(x, t) = ax^2 + bt + \omega(x, t)$$

transforma (*) en

$$(**) \begin{cases} \omega_t = \omega_{xx} & x \in (0, 1), t > 0 \\ \omega_x(0, t) = \omega_x(1, t) = 0 & t > 0 \\ \omega(x, 0) = 1 & x \in (0, 1) \end{cases}$$

Usando separación de variables, hallar ω y u .