

P₁

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y), \quad z = x + iy.$$

a) Para determinar que una fn sea armónica simplemente verificamos que su laplaciano sea 0, es decir

$$\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$\bullet u(x, y) = y^3 - 3x^2y$$

$$\begin{aligned} u_x &= -6xy \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u_{xx} = -6y \\ u_y &= 3y^2 \quad \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) u_{yy} = 6y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_{xx} + u_{yy} \\ &= -6y + 6y \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$u(x, y) = y^3 - 3x^2y \text{ es armónica}$$

$$\bullet u(x, y) = 3x^2 + 2xy - y^3$$

$$\begin{aligned} u_x &= 6x + 2y \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u_{xx} = 6 \\ u_y &= 2x - 3y^2 \quad \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) u_{yy} = -6y \end{aligned}$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 6 - 6y \neq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$u(x, y) = 3x^2 + 2xy - y^3 \text{ no es armónica} \\ (\forall y \in \mathbb{R})$$

b) Se sabe que una función holomorfa tiene parte real y parte imaginaria armónicas (ver aux 5 P2). Por tanto para el caso $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ sí es posible encontrar $v(x, y)$ tq f sea holomorfa, mientras que para $u(x, y) = 3x^2 + 2xy - y^3$ Para encontrar v que hace que f sea holomorfa en el primer caso resolvemos la EDP que surge de aplicar Cauchy-Riemann.

$$\bullet \frac{\partial}{\partial y} v = \frac{\partial}{\partial x} u$$

$$\text{say } \int \frac{\partial}{\partial y} v = -6xy$$

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int (-6xy) dy + C_1(x) \\ &= -\cancel{6}^3 x \frac{y^2}{\cancel{2}} + C_1(x) \\ &= \underline{-3xy^2 + C_1(x)} \end{aligned}$$

$$\bullet \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} (-3xy^2 + C_1(x)) = -\frac{\partial}{\partial y} (y^3 - 3x^2y)$$

$$-\cancel{3}y^2 + C_1'(x) = -\cancel{3}y^2 + 3x^2$$

$$\int dx \int C_1'(x) = 3x^2 / \text{EDO no EDP}$$

$$\begin{aligned} C_1(x) &= 3 \int x^2 dx + \textcircled{C} \\ &= \cancel{3} \frac{x^3}{\cancel{3}} + C \end{aligned} \quad \begin{array}{l} cte \in \mathbb{R} \text{ no} \\ \text{depende de "y"} \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{v(x,y) = -3xy^2 + x^3 + C}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Queda propuesto verificar que también es armónica.

P₂

a) Pd) Desigualdad ML:

Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ (conjunto de funciones holomorfas en Ω , $p \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ tq $\bar{D}(p,r) \subset \Omega$ (f holomorfa en complemento de $D(p,r)$, subconjunto de Ω). Definiendo

$M_r = \sup_{z \in \partial D(p,r)} |f(z)|$ (supremo o máximo absoluto de $f(z)$)

sobre el contorno $\partial D(p, r)$ entonces:

$$\left| \oint_{\partial D(p, r)} f(z) dz \right| \leq M_r \mathcal{L}(\partial D(p, r))$$

Partimos del lado izq y vamos acotando:

$$\begin{aligned} \left| \oint_{\partial D(p, r)} f(z) dz \right| &\stackrel{\text{desigualdad triangular integral}}{\leq} \oint_{\partial D(p, r)} |f(z)| |dz| \\ &\stackrel{M_r}{\leq} \sup_{z \in \partial D(p, r)} |f(z)| \oint_{\partial D(p, r)} |dz| \\ &= M_r \underbrace{\oint_{\partial D(p, r)} |dz|}_{\text{def de longitud de curva en } \mathbb{C}} \\ &= M_r \mathcal{L}(\partial D(p, r)) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Desigualdad de Cauchy (mismas hipótesis que antes)

$$\text{Pdta } \forall k \in \mathbb{N} \quad |f^{(k)}(p)| \leq \frac{k! M_r}{r^k}$$

Como dice el enunciado es un corolario de la fórmula de diferenciación de Cauchy así que partamos por eso:

$$\begin{aligned} \frac{f^{(k)}(p)}{k!} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p, r)} \frac{f(z)}{(z-p)^{k+1}} dz \\ \text{I.I.} \quad \left| \frac{f^{(k)}(p)}{k!} \right| &= \frac{1}{|2\pi|} \left| \oint_{\partial D(p, r)} \frac{f(z)}{(z-p)^{k+1}} dz \right| \end{aligned}$$

desigualdad integral $\leq$
 Cr $z = p + re^{i\theta}$
 $\Rightarrow dz = re^{i\theta} d\theta$

$$\begin{aligned} & \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial D(p,r)} \left| \frac{f(z)}{(z-p)^{k+1}} \right| |dz| \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(p+re^{i\theta})|}{|(p+re^{i\theta}-p)^{k+1}|} |re^{i\theta}| d\theta \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(p+re^{i\theta})|}{|r^{k+1}|} |r| d\theta \\ & = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{r}{r^{k+1}} \right| \int_0^{2\pi} |f(p+re^{i\theta})| d\theta \\ & \quad \text{no dependia de } \theta, \text{ sale de la } \int \\ & = \frac{1}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} |f(p+re^{i\theta})| d\theta \\ & \quad |f(p+re^{i\theta})| \leq M_r \\ & \leq \frac{1}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} M_r d\theta \\ & = \frac{M_r}{2\pi r^k} \cdot 2\pi \\ \Rightarrow \frac{|f^{(k)}(p)|}{k!} & \leq \frac{M_r}{r^k} \\ \Rightarrow |f^{(k)}(p)| & \leq \frac{M_r k!}{r^k} \end{aligned}$$

b) Pdg Sea f analitica en todo $\mathbb{C}$ t.q. $|f(z)| \leq |z| \log(|z|)$
 $\forall |z| \geq R > 1$, entonces f es necesariamente un polinomio de grado 1.

Primero desmenuzamos la info importante:

- f analitica $\Rightarrow$ se puede escribir como serie de potencias

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-p)^k$$

$c_k = \frac{f^{(k)}(p)}{k!}$

- Se tiene la cota $|f(z)| \leq |z| \log(|z|) \quad \forall |z| > r > 1$

Con esta info y la indicación del enunciado, aplicamos desigualdad de Cauchy a ver dónde nos lleva:

$$|f^{(k)}(p)| \leq \frac{\sup_{z \in \partial D(p,r)} |f(z)|}{r^k} M_r$$

Recordamos que el supremo se define como la menor de las cotas superiores de un conjunto, por lo tanto sin pérdida de generalidad:

$$|f(z)| \leq M_r \leq |z| \log(|z|) \quad (\forall |z| > r > 1) \\ \Rightarrow \frac{|f^{(k)}(p)|}{k!} \leq \frac{|z| \log(|z|)}{r^k} \Rightarrow \boxed{r > 1}$$

Para relacionar fácilmente $|z|$ con r podemos hacer $z = re^{i\theta} \Rightarrow p=0$:

$$\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \leq \frac{r \log(r)}{r^k} = \frac{\log(r)}{r^{k-1}}, \quad \boxed{\forall k \in \mathbb{N}} \text{ importante}$$

¿Qué pasa si $r \rightarrow \infty$?

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(r)}{r^{k-1}} = 0$$

El logaritmo crece asintóticamente más lento que los polinomios z^m $m = k-1, 1$ $k \geq 2$

Por lo tanto $C_k = 0 \quad \forall k \geq 2$, pues $|C_k| = \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \leq \frac{\log(r)}{r^{k-1}} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \quad k \geq 2$

módulos son mayores a 0

$$0 \leq |c_k| \leq 0$$

$\Rightarrow c_k = 0$, sandwich

Y así los únicos coef's que no son idénticamente 0 son c_0 y c_1

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

$$= c_0 \cancel{z^0}^1 + c_1 z^1$$

$$= c_0 + c_1 z$$

polinomio de grado 1

P3

$$\text{Sea } S_n = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots + nz^n = \sum_{k=1}^n k z^k \text{ y}$$

$$T_n = z + z^2 + z^3 + \dots + z^n = \sum_{k=1}^n z^k$$

a) Pdg

$$S_n = \frac{T_n - n z^{n+1}}{1-z}$$

En efecto, multiplicando por $1-z$ y partiendo del lado izquierdo:

$$(1-z)S_n = (1-z) \sum_{k=1}^n k z^k$$

$$= \sum_{k=1}^n k z^k - \sum_{k=1}^n k z^{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^n k z^k - \sum_{k'=2}^{n+1} (k'-1) z^{k'} \quad \left. \begin{array}{l} \text{último término} \\ \downarrow \end{array} \right\} k'=k+1$$

$$= \underbrace{z}_{\text{primer término}} + \sum_{k=2}^n k z^k - \left(\sum_{k'=2}^n (k'-1) z^{k'} - (n+1-1) z^{n+1} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= z + \sum_{k=2}^n (\cancel{k} - (\cancel{k-1})) z^k - n z^{n+1} \\
&= z + \sum_{k=2}^n z^k - n z^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^n z^k - n z^{n+1} \\
&= T_n(z) - n z^{n+1}
\end{aligned}$$

b) Para determinar el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(k)}_{c_k} z^k$ aplicamos criterio del cociente:

$$C_k = k \wedge C_{k+1} = k+1$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow R &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{C_k}{C_{k+1}} \right| \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{k}{k+1} \right| \\
&= 1
\end{aligned}$$

Para calcular la suma de la serie partimos del resultado anterior:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n k z^k \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n z^k - n z^{n+1}}{1-z} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{\infty} z^k - \lim_{n \rightarrow \infty} (n z^{n+1})}{1-z}
\end{aligned}$$

$\rightarrow 0$ límite de la forma na^n con $a < 1$ vale 0

(*)

Ahora recordamos que:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} z^k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} - 1 = \frac{1 - (1-z)}{1-z} = \frac{z}{1-z}$$

Reemplazando

$$\sum_{k=1}^{\infty} k z^k = \frac{z}{1-z}$$

+ $0 z^0$
término
"cero"

$$\sum_{k=1}^{\infty} k z^k = \frac{z}{(1-z)^2}$$

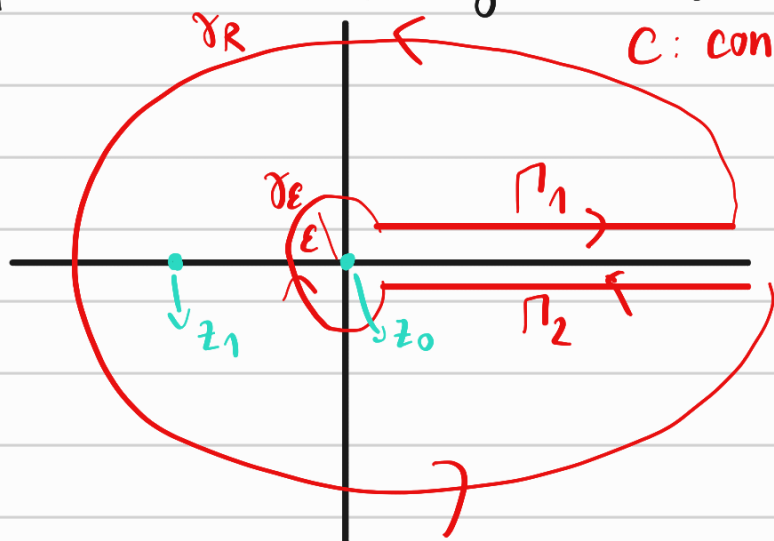
$$\sum_{k=0}^{\infty} k z^k = \frac{z}{(1-z)^2}$$

P3

Piden calcular la sgte integral impropia:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{-\alpha}}{1+x} dx \quad 0 < \alpha < 1$$

Sea $f(z) = \frac{z^{-\alpha}}{1+z} = \frac{1}{z^{\alpha}(1+z)}$, cuyas singularidades son $z_0 = 0$ (esencial) y $z_1 = -1$ polo simple. Definimos el sgte contorno (estípico, sirve para deshacerse de singularidades esenciales y ramas de corte).



C: contorno de Hankel

En virtud del teo de los residuos sobre C:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1)$$

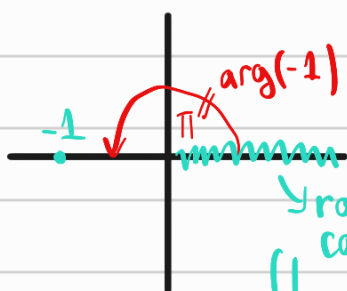
z_1 único polo encerrado

Calculemos el residuo (z_1) encerrado por el contorno:

$$\operatorname{Res}(f, z) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{1}{z^{\alpha}(z+1)}$$

$$= (-1)^{\alpha}$$

$$= \exp(\alpha \log(-1))$$



rama de corte
(1 no está def en $\mathbb{R}^+$)

en $\mathbb{R}$ esto no está def, pero si extendemos $\log$ a $\mathbb{C}$ con una rama de corte adecuada sí

$$\log(-1) = \ln(|1|) + i \arg(-1) \quad / \theta \in [0, 2\pi]$$

$$= i\pi$$

Por tanto

$$\text{Res}(f, -1) = \exp(\alpha \log(-1))$$

$$= e^{\alpha i\pi}$$

Por otra parte, el camino C se compone de la unión de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \gamma_\epsilon \cup \gamma_R$, así que:

$$\underbrace{\int_{\Gamma_1} f(z) dz}_{I_1} + \underbrace{\int_{\Gamma_2} f(z) dz}_{I_2} + \underbrace{\int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz}_{I_\epsilon} + \underbrace{\int_{\gamma_R} f(z) dz}_{I_R} = 2\pi i \text{Res}(f, -1) \quad (\star)$$

$$= 2\pi i e^{\alpha i\pi}$$

Empecemos con I_1 :

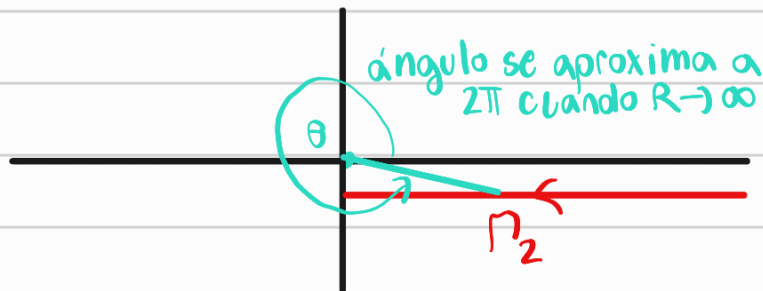


ángulo se aproxima a 0 cuando $R \rightarrow \infty$

$$z = x e^{i0} \Rightarrow dz = dx$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_1} \frac{z^{-\alpha}}{(1+z)} dz = \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}}{(1+x)} dx = I_1$$

Lo mismo con Γ_2 :



ángulo se aproxima a 2π cuando $R \rightarrow \infty$

$$z = x e^{2\pi i} \Rightarrow dz = dx$$

$$\int_{\Gamma_2} \frac{z^{-\alpha}}{(1+z)} dz = \int_\infty^0 \frac{x^{-\alpha} e^{-2\pi i \alpha}}{(1+x e^{2\pi i})} dx$$

$$I_2 = -e^{-2\pi i \alpha} \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}}{1+x} dx$$

Ahora acotaremos γ_ϵ y γ_R cosa que cuando $R \rightarrow \infty$ y $\epsilon \rightarrow 0$ se vayan a 0. Partamos con I_R :

$$|I_R| \leq \int_{\gamma_R} \left| \frac{z^{-\alpha}}{1+z} \right| |dz| = \int_0^{2\pi} \left| \frac{R^{-\alpha} e^{-i\alpha\theta}}{1+R e^{i\theta}} \right| |i R e^{i\theta} d\theta|$$

$$\begin{aligned}
 |u| &= |u-v+v| \\
 &\leq |u-v| + |v| \\
 \Rightarrow ||u|-|v|| &\leq |u-v| \\
 \Rightarrow \frac{1}{|u-v|} &\leq \frac{1}{||u|-|v||}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \int_0^{2\pi} \frac{R^{-\alpha+1} |e^{-i\alpha\theta}|}{|1+Re^{i\theta}|} \cancel{|i|} \cancel{|e^{i\theta}|} d\theta \\
 &\leq R^{-\alpha+1} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|1+Re^{i\theta}|} d\theta \\
 &\stackrel{*}{\leq} R^{-\alpha+1} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|1-|R||e^{i\theta}|} d\theta \\
 &= \frac{R^{-\alpha+1}}{R-1} \int_0^{2\pi} d\theta \\
 &= \frac{R^{-\alpha+1}}{R-1} 2\pi \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad / \text{dado que } \alpha < 1
 \end{aligned}$$

Analogamente para δ_ϵ (ocupamos mismas desigualdades pero con $R=\epsilon$):

$$|I_\epsilon| \leq \frac{\epsilon^{-\alpha+1}}{\epsilon-1} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\theta \quad \text{acotado } \leq M \in \mathbb{R}$$

$$\leq M \frac{\epsilon^{1-\alpha}}{\epsilon-1} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

Reemplazando lo obtenido en (★) y definiendo $I = \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}}{1+x} dx$

$$\underbrace{I_1}_{I} + \underbrace{I_2}_{e^{-2\pi i \alpha} I} + \underbrace{I_R}_0 + \underbrace{I_\epsilon}_0 = 2\pi i e^{-i\alpha\pi}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow I(1 - e^{-2\pi i \alpha}) &= 2\pi i e^{-i\alpha\pi} \\
 &= \pi \frac{2i}{(1 - e^{-2\pi i \alpha})} \cdot e^{i\alpha\pi} \\
 &= \pi \frac{2i}{(e^{i\alpha\pi} - e^{-i\alpha\pi})} = \frac{1}{\sin(\alpha\pi)} \\
 &= \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}
 \end{aligned}$$

P5 (Salió en control de electro, nadie lo resolvió xd)
 La idea del ejercicio es calcular la integral para la fuerza:

$$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \oint \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta)}{\frac{b}{a} + \sin(\theta)} d\theta$$

primitiva asquerosa
 (búsqwenla con Wolfram)

La cual haremos pasándonos a $\mathbb{C}$. Para ello ocuparemos el cv $z = e^{i\theta} \Rightarrow dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$ $\theta \in (0, 2\pi]$.
 Por lo tanto:

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z + z^{-1}}{2i} = \frac{1}{2i} \frac{z^2 - 1}{z}$$

$$dz = iz d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{\left(\frac{b}{a}\right) + \sin\theta} d\theta &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{2i} \frac{z^2 - 1}{z} \frac{1}{c + \frac{z^2 - 1}{2iz}} \frac{dz}{iz} \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{z^2 - 1}{2i^2 z^2} \frac{z/z}{2ic + z^2 - 1} dz \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{z^2 - 1}{iz(z^2 + 2icz - 1)} dz \end{aligned}$$

$f(z)$

Lo que es una integral que podemos calcular con residuos.
 Veamos los polos de $f(z)$:

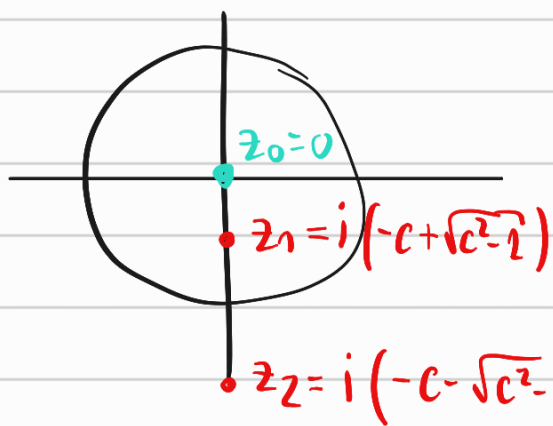
$$iz(z^2 + 2icz - 1) = 0$$

$$\Rightarrow z_0 = 0 \wedge z_{1,2} = -\frac{2ic}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(2ic)^2 + 4}$$

$$= -ic \pm \sqrt{1-c^2} < 0$$

$\Rightarrow z_0=0, z_1=i(-c+\sqrt{c^2-1}), z_2=i(-c-\sqrt{c^2-1})$ polos simples

Antes de calcular sus residuos veamos cuáles se encierran por circunf. de radio 1 ($|z|=1$):



Como encerramos sólo z_0 y z_1 calculamos únicamente $\text{Res}(f, z_0)$ y $\text{Res}(f, z_1)$

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{z^2 - 1}{iz(z^2 + 2icz - 1)} = \frac{-1}{i(+1)}$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) \frac{z^2 - 1}{iz(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{1}{i} \\ &= \frac{z_1^2 - 1}{iz_1(z_1 - z_2)} \\ &= \frac{-1 \cdot i^2(-c + \sqrt{c^2 - 1})^2 - 1}{i(i^2(c^2 - 2c\sqrt{c^2 - 1} + c^2 - 1) - i^2(-c + \sqrt{c^2 - 1})(-c - \sqrt{c^2 - 1}))} \\ &= \frac{-(2c^2 - 2c\sqrt{c^2 - 1} - 1) - 1}{i(-(2c^2 - 2c\sqrt{c^2 - 1} - 1) + c^2 - (c^2 - 1))} \\ &= \frac{-2c^2 + 2c\sqrt{c^2 - 1} + 1 - 1}{i(-2c^2 + 2c\sqrt{c^2 - 1} + 2)} \\ &= \frac{1}{i} \frac{-c^2 + c\sqrt{c^2 - 1}}{-c^2 + c\sqrt{c^2 - 1} + 1} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{i} \frac{c(\sqrt{c^2-1}-c)}{(\sqrt{c^2-1}-c)(-\sqrt{c^2-1})} \quad \downarrow = \text{factoriza}$$

$$= \frac{1}{i} \frac{-c}{\sqrt{c^2-1}}$$

Sumando residuos:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{h/a + \sin\theta} d\theta &= \oint_{|z|=1} \frac{z^2-1}{iz(z^2+2icz-1)} dz \\ &= 2\pi i \left(\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_1) \right) \\ &= 2\pi \left(1 - \frac{c}{\sqrt{c^2-1}} \right) \end{aligned}$$

Reemplazando en la expresión de la fuerza:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{1 \rightarrow 2} &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} 2\pi \left(1 - \frac{c}{\sqrt{c^2-1}} \right) \\ &= \mu_0 I_1 I_2 \left(1 - \frac{h/a}{\sqrt{(h/a)^2-1}} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \downarrow c = \frac{h}{a} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

(sale más corto así que con primitiva)