Auxiliar 8

Preparación C2

Profesor: Ricardo Carlos Freire
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función compleja. Sea también $z = x + iy$ y considere $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

a) Determine si las siguientes funciones son armónicas es decir:

$$\Delta u(x, y) = 0$$

- $u(x, y) = y^3 - 3x^2 y$
- $u(x, y) = 3x^2 + 2xy - y^3$

b) Determine si es posible encontrar una función $v(x, y)$ tal que $f = u + iv$ es holomorfa (para los $u(x, y)$ definidos en el item anterior). En caso de que sea posible encuentre la función v.

Pregunta 2

a) Demuestre las siguientes desigualdades

Desigualdad ML y de Cauchy

Sea Ω abierto, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $p \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $\overline{D}(p, r) \subseteq \Omega$. Si definimos $M_r = \sup_{z \in \partial D(p,r)} |f(z)|$, entonces

$$\left| \oint_{\partial D(p,r)} f(z)\, dz \right| \leq M_r \ell(\partial D(p, r))$$

donde $\ell(\partial D(p, r))$ representa la longitud del camino cerrado $\partial D(p, r)$.
Y además (corolario de fórmula de diferenciación de Cauchy), para todo $k \geq 0$, se cumple que

$$|f^{(k)}(p)| \leq \frac{k! M_r}{r^k}$$

b) Ocupando lo anterior demuestre que para una función f analítica en todo $\mathbb{C}$ tal que $|f(z)| \leq |z| \log(|z|)$ para todo $|z| \geq r > 1$, entonces f es necesariamente un polinomio de grado uno.

Pregunta 3

Sea $S_n(z) = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots + nz^n$ y $T_n(z) = z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n$.

a) Demuestre que

$$S_n(z) = \frac{T_n(z) - nz^{n+1}}{1 - z}$$

b) Determine el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} kz^k$, y utilizando el resultado anterior, calcule la suma de dicha serie.

Pregunta 4

Usando métodos de integrales de contorno en el plano complejo demuestre que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{-\alpha}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

para $0 < \alpha < 1$.

Indicación: Utilice el contorno de la Figura 1

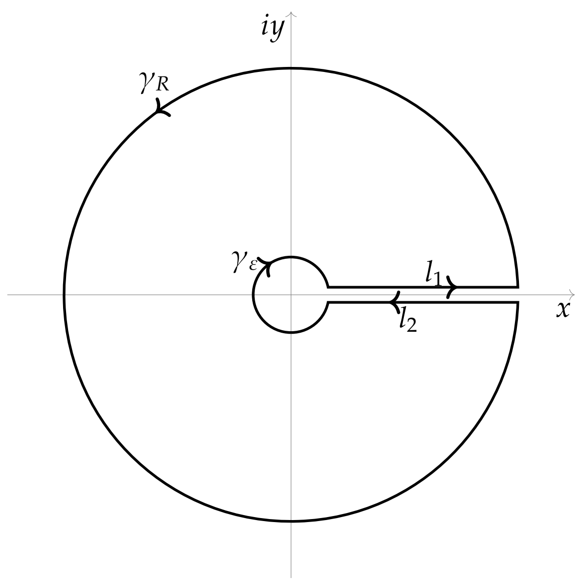

Figura 1: Contorno tipo *keyhole*.

Pregunta 5

Considere un alambre infinito por el cual circula una corriente I_1 y una espira circular de radio a, coplanar con el alambre y tal que el centro de la espira está a una distancia h del alambre, como muestra la Figura 2. Suponga que la espira circular conduce una corriente I_2. La idea del problema es encontrar la fuerza que actúa sobre la espira donde circula la corriente I_2 en la región coplanar $z = 0$.

Para ello primero se ocupa ley de Ampere de circuitos, determinando la expresión vectorial del campo magnético $\mathbf{B}_1$ debido a la corriente I_1 que circula por el alambre infinito. Teniendo el campo la fuerza se calcula como

$$\mathbf{F_{1\to 2}} = \int_0^{2\pi} I_2 \, \mathbf{dl_2} \times \mathbf{B_1}$$

Reemplazando con los diferenciales y campos respectivos se llega a

$$\mathbf{F_{1\to 2}} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\hat{\jmath}\int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta)}{h/a + \sin(\theta)} d\theta$$

Calcule la fuerza mediante métodos de integración compleja (asuma $h/a > 1$).

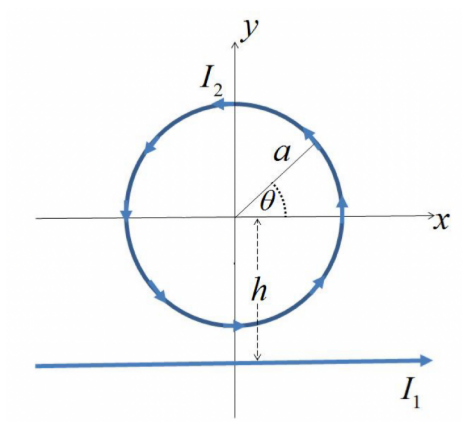

Figura 2: Esquema del alambre infinito y la espira circular.

Integración compleja

Fórmula de Cauchy: Sea f una función continua en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y holomorfa en $\Omega - \{z_0\}$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{D}(z_0, r) \subseteq \Omega$. Entonces para todo $z \in D(z_0, r)$ se cumple que:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z_0} dw$$

Y más aún, también se tiene la fórmula de diferenciación de Cauchy:

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw$$

Singularidad: Decimos que $p \in \mathbb{C}$ es singularidad de $f(z)$ si f no es holomorfa en p, y en todo entorno de p existen puntos donde la función es holomorfa.

Singularidad aislada: Decimos que $p \in \mathbb{C}$ es singularidad aislada de $f(z)$ si f no es holomorfa en p, y existe un radio $R > 0$ tal que f es holomorfa en $D(p, R) \setminus \{p\}$.

Singularidad evitable: $p \in \mathbb{C}$ se dice singularidad evitable si es singularidad aislada y $L_0(p) = \lim_{z \to p} f(z)$ existe.

Polo: $p \in \mathbb{C}$ es un polo de $f(z)$ si p es un punto singular aislado de $f(z)$ y existe $m \geq 1$ entero tal que $L_m(p) = \lim_{z \to p}(z - p)^m f(z)$ existe y no es igual a 0. Al menor m que cumpla esto le llamamos el orden de p. En particular, p es polo simple si es polo de orden $m = 1$.

Residuo: Definimos para p un polo de orden m, su residuo como

$$\text{Res}(f, p) = \lim_{z \to p} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z - p)^m f(z)\right)$$

que corresponde al coeficiente c_{m-1} de la serie de Laurent de f en torno a p.

Teorema de los Residuos: Sea f una función meromorfa en Ω y P sus polos. Sea Γ un camino simple y cerrado, recorrido en sentido antihorario, que encierra una región $D \subseteq \Omega$ tal que $\Gamma \cap P = \emptyset$. Entonces Γ encierra un número finito de polos de f, digamos $P \cap D = \{p_1, \ldots, p_n\}$ y más aún

$$\oint_\Gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \text{Res}(f, p_j)$$