

P1 [Polos]

a) Polos de $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$. Para ver sing. simplemente hay que imponer cuando se indefine la función. En este caso es fácil ver que los z tq $\cos(z)=0$ son singularidades. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\cos(z) &\stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow z_n &= \frac{\pi}{2} + n\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ \text{polos de } \tan(z)\end{aligned}$$

Los polos también tienen orden, el cual se obtiene viendo el valor del sgte límite:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^k f(z) \neq 0 \Rightarrow z_0 \text{ polo de orden } k$$

Para este caso:

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow z_n} (z-z_n) \frac{\sin(z)}{\cos(z)} &= \sin(z_n) \lim_{z \rightarrow z_n} \frac{z-z_n}{\cos(z) - \cos(z_n)} \\ &\quad \text{bien definido} \quad \text{def derivada} \\ &= \sin(z_n) \lim_{z \rightarrow z_n} \frac{1}{-\sin(z)} = -\frac{\sin(z_n)}{\sin(z_n)} \neq 0 \\ &\quad \neq \infty\end{aligned}$$

$\Rightarrow z_n$ polos de orden 1

b) Sea $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$. Veamos denominador para los polos:

$$1+z^4 = (z^2+i)(z^2-i) \quad \text{/ suma por dif.}$$

$$= (z+i\sqrt{i})(z-i\sqrt{i})(z+\sqrt{i})(z-\sqrt{i})$$

$$z_4 = -i\sqrt{i} \quad z_2 = i\sqrt{i} \quad z_3 = -\sqrt{i} \quad z_1 = \sqrt{i}$$

polos simples
(orden 1)

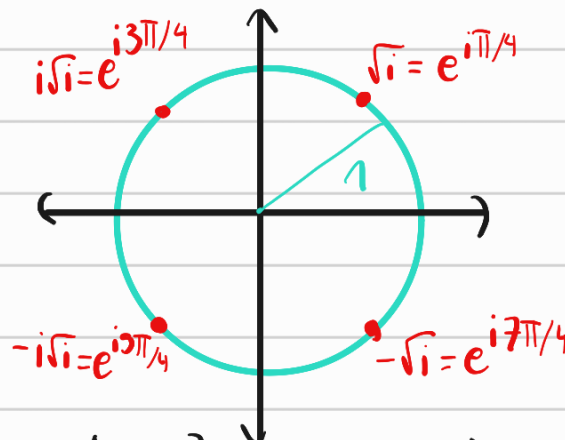
Pero hay una forma más compacta de representarlas, ocupando la forma polar

Notamos que i en forma polar es $e^{i\pi/2}$. Esto implica que $\sqrt{i} = (i)^{1/2} = (e^{i\pi/2})^{1/2} = e^{i\pi/4}$. Además $-1 = e^{i\pi}$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{i} = e^{i\pi/4} \\ z_2 &= i\sqrt{i} = e^{i\pi/2} e^{i\pi/4} = e^{i\frac{3\pi}{4}} \\ z_3 &= -\sqrt{i} = e^{i\pi} e^{i\pi/4} = e^{i\frac{5\pi}{4}} \\ z_4 &= -i\sqrt{i} = e^{i\pi/2} e^{i\frac{5\pi}{4}} = e^{i\frac{7\pi}{4}} \end{aligned}$$

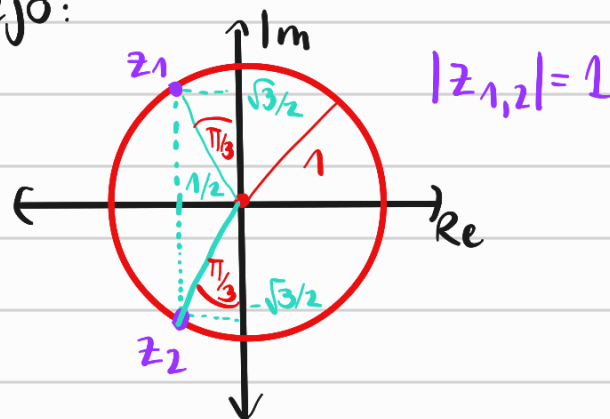
$$\Rightarrow z_k = e^{i \frac{(2k-1)\pi}{4}} \quad k \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Es decir, en el plano complejo



c) $\frac{1}{1+z^2+z}$ Imponiendo $z^2+z+1=0 \Rightarrow z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1-4}{2}}$
 $z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$
 polos simples

En el plano complejo:



d) $e^{1/z}$ en este caso la singularidad es claramente $z=0$. No obstante es especial ya que si intentas calcular su orden:

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^k e^{1/z}$$

Expandiendo $e^{1/z}$ en serie de potencia:

$$u = \frac{1}{z} \begin{cases} e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \\ e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} \end{cases}$$

Reemplazando en el limite:

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{k-n}}{n!} = \frac{1}{z^{n-k}} \text{ si } k < n$$

Viendo la sumatoria, para un k arbitrario siempre habrá un $n > k$ tal que el limite esté mal definido en $z=0$, por lo que no hay ningún orden permitido. A este tipo de singularidades se les llama esenciales.



f holomorfa en A que contiene a $z=0$, γ curva que encierra a $z=0$.

$$\oint_{\gamma} \left(\frac{f(z)}{z^3} + iz^3 + \frac{z}{z} \right) f(z) dz \\ = \oint_{\gamma} \frac{[f(z)]^2}{z^3} dz \overset{I_1}{=} + \oint_{\gamma} i z^3 f(z) dz \overset{I_2}{=} + \oint_{\gamma} \frac{2f(z)}{z} dz \overset{I_3}{=}$$

Se tiene que $[f(z)]^2$, $iz^3 f(z)$ y $2f(z)$ son holomorfas por algebra y composición de funciones holomorfas en $\mathbb{C}$, es decir podemos aplicar las formulas de Cauchy. Por la forma de las integrales el punto sobre el cual aplicaremos la formula será $z=0$. Partamos con I_2 que es la más simple:

$$I_2 = \oint_{\gamma} i z^3 f(z) dz \overset{\text{por Teo de Cauchy-Goursat}}{=} 0 \quad \text{Sobre } iz^3 f(z) \text{ que es holomorfa}$$

Para I_3 recordamos formula integral de Cauchy para $g(z) = 2f(z)$

$$I_3 = \oint_{\gamma} \frac{2f(z)}{z-0} = 2\pi i \cdot 2f(0) = \underline{4\pi i f(0)}$$

Para I_1 la aplicación de la fórmula integral de Cauchy no es tan directa pues en este caso el polo $z=0$ es de orden 3. Utilizaremos un corolario de la fórmula, conocido como fórmula de diferenciación, el cual tiene la sgte forma (demostrado en AUK 6 P2):

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

Aplicado a I_1

$$I_1 = \oint_{\gamma} \frac{f^2(z)}{(z-0)^{2+1}} = \frac{2\pi i}{2!} (f^2(0))'' = \pi i (2f(0)f'(0))' = \underline{2\pi i ([f'(0)]^2 + f(0)f''(0))}$$

Por lo que:

$$\oint_{\gamma} \left(\frac{f(z)}{z^3} + iz^3 + \frac{2}{z} \right) f(z) dz = \underline{I_1 + I_2 + I_3 = 2\pi i ([f'(0)]^2 + f(0)f''(0) + 2f(0))}$$

P3 $f(z) = \frac{e^{2z} \sin(z)}{z^3(z+i)}$

Los ceros son tq $\sin(z)=0 \wedge z^3(z+i) \neq 0$

$$\Rightarrow z_k = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Los polos por su parte son tq $z^3(z+i)=0 \Rightarrow z_1=0 \wedge z_2=-i$

veamos sus ordenes

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{2z} \sin(z)}{(z+i)z} = \frac{1}{i} \neq 0$$

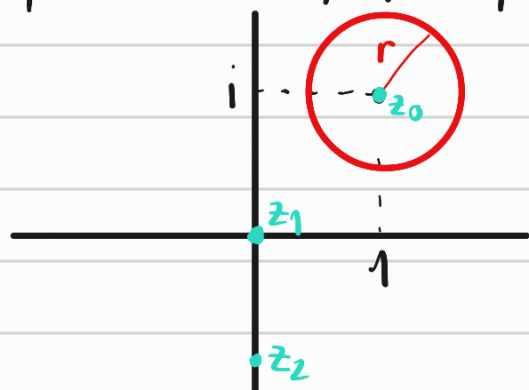
↑ limite conocido

$$\lim_{z \rightarrow -i} (z+i) f(z) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{e^{2z} \sin(z)}{z^3} = \frac{e^{-2i} \sin(-i)}{(-i)^3} \neq 0$$

↑ sin(i)

Sigue que $z_1=0$ es de orden 2 y $z_2=-i$ de orden 1.

c) Sea $z_0=1+i$, $z_1=0$ y $z_2=-i$



$$|z_0 - z_1| = \sqrt{2} \wedge |z_0 - z_2| = \sqrt{5}$$

Caso $r < \sqrt{2}$ no se encierra ningún polo por lo que en virtud de Cauchy-Goursat (f es holomorfa)

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Caso $\sqrt{2} < r\sqrt{5}$ Se encierra $z_1=0$ polo de orden 2. En virtud del Teorema de los residuos:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1=0)$$

El residuo lo calculamos con formula conocida (reconociendo $n=2$)

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\cancel{z^2} \frac{e^{2z} \sin(z)}{\cancel{z^3} (z+i)} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{2z} (2 \sin(z) + \cos(z)) z(z+i) - (2z+i) e^{2z} \sin(z)}{z^2 (z+i)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cancel{\sin(z)}}{z} \cdot \frac{2e^{2z} \cancel{(z+i)} - e^{2z}}{\cancel{(z+i)^2}} + \frac{\cancel{e^{2z}}}{\cancel{(z+i)}} \cdot \frac{z \cos(z) - \sin(z)}{z^2}\end{aligned}$$

$\downarrow 1 \quad \quad \quad \downarrow -2i+1 \quad \quad \quad \downarrow -i \quad \quad \quad \nearrow 0$

* Usando L'Hopital para $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \cos(z) - \sin(z)}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-z \sin(z) + \cos(z) - \cos(z)}{2z} = 0$

Por algebra de límites:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, 0) &= 1 - 2i \\ \Rightarrow \oint_{\gamma} f(z) dz &= 2\pi i (1 - 2i) \\ &= \underline{2\pi i + 4\pi}\end{aligned}$$

Caso $r > \sqrt{5}$ Se encierra z_1 y z_2 , por lo que en virtud del teo de los residuos

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i (\operatorname{Res}(f, 0) + \operatorname{Res}(f, -i))$$

El residuo de $z_1=0$ ya lo calculamos. Ahora el residuo en z_2 es:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, -i) &= \lim_{z \rightarrow -i} \cancel{(z+i)} \frac{e^{2z} \sin(z)}{\cancel{(z+i)} z} \\ &= \frac{-e^{-2i} \sin(i)}{i} = \underline{ie^{-2i} \sin(i)}\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \underline{2\pi i (1 - 2i + ie^{-2i} \sin(i))}$$

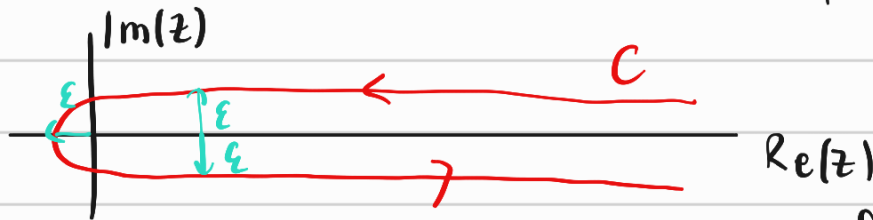
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^s, \quad \operatorname{Re}(s) > 1$$

Una expresión alternativa y que extiende la definición de la función a casi todo el plano complejo es la sgte:

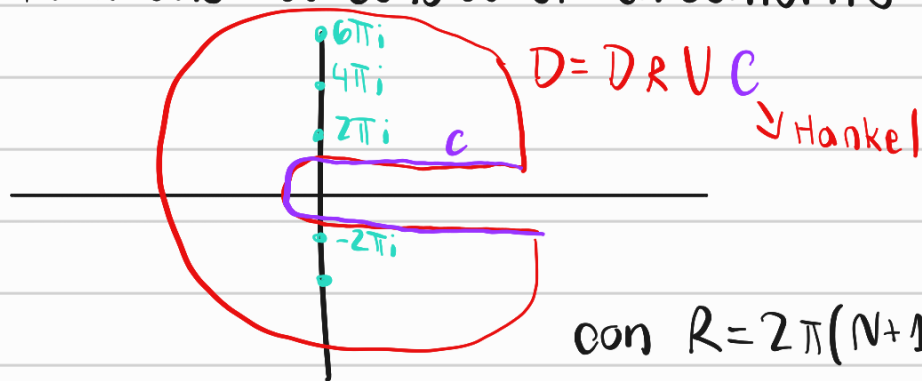
función gamma
n extensión
de los factoriales

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz$$

Donde C es el contorno de Hankel dado por:



En particular queremos evaluar la integral $\int_C f(z) dz$ donde $f(z) = \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}$. Para ello se considera un contorno D



con $R = 2\pi(N+1), N \in \mathbb{N}$

De esta manera

$$\oint_D f(z) dz = \int_{D_R} f(z) dz + \int_C f(z) dz$$

Y en virtud del teo de los residuos

$$\int_C f(z) dz = \oint_D f(z) dz = \sum_n \operatorname{Res}(f(z), z_n)$$

polos encerrados
por contorno D

Por lo que sólo hace falta encontrar los residuos de $f(z) = \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}$. Para ello vemos denominador = 0:

$$e^z - 1 = 0 \Rightarrow z_n = 2\pi i n, n \in \mathbb{Z}$$

polos de f(z)

Calculamos sus residuos

$$\text{Res}(f, z_n) = \lim_{z \rightarrow z_n} (z - z_n) f(z)$$

$$= \lim_{z \rightarrow z_n} \cancel{(z - z_n)}^{\substack{z \rightarrow z_n \\ 0}} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}$$

bien definido

$$= (-2\pi i n)^{s-1} \lim_{z \rightarrow z_n} \frac{(z - z_n)}{e^z - 1} = L$$

limite de la forma $\frac{0}{0}$
 $\Rightarrow$ L'Hopital

$$L = \lim_{z \rightarrow z_n} \frac{\frac{d}{dz}(z - z_n)}{\frac{d}{dz}(e^z - 1)} = \lim_{z \rightarrow z_n} \frac{1}{e^z} = \frac{1}{e^{2\pi i n}} = 1$$

$$\Rightarrow \text{Res}(f, z_n) = (-2\pi i n)^{s-1}$$

Sumando todos los residuos:

$$I = 2\pi i \left[\sum_{n=-\infty}^{n=-1} (-2\pi i n)^{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-2\pi i n)^{s-1} \right] / z_n=0 \text{ no se encierra por } D$$

$$= 2\pi i \left[(2\pi)^{s-1} i^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} + (2\pi)^{s-1} (-i)^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} \right]$$

$$= 2\pi i \left[(2\pi)^{s-1} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1-s}}_{\zeta(1-s)} \left[\underbrace{i^{s-1}}_{e^{i\pi/2}} + \underbrace{(-i)^{s-1}}_{e^{-i\pi/2}} \right] \right]$$

$$= 2\pi i (2\pi)^{s-1} \zeta(1-s) \left[e^{i\pi/2(s-1)} + e^{-i\pi/2(s-1)} \right]$$

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{2}(s-1)\right)$$

Recordar que
 $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

$$\Rightarrow \int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz = 2\pi i (2\pi)^{s-1} \zeta(1-s) 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}(s-1)\right)$$

Reemplazando en la funcional de Riemann

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz$$

$$\Rightarrow \zeta(s) = \prod (1-s) (2\pi)^{s-1} \sum (1-s) 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}(s-1)\right)$$

Evaluando en $s = -1$:

$$\zeta(-1) = \underbrace{\prod (2)}_{(2-1)! = 1} (2\pi)^{-2} \sum (2) 2 \cos(-\pi)$$

$$(2-1)! = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{problema de Basilea, resultado conocido})$$

$$= - \frac{1}{4\pi^2} \frac{\pi^2}{6}$$

$$= - \frac{1}{12}$$