

Auxiliar 7

Fórmula de Cauchy y teorema de los residuos

Profesor: Ricardo Carlos Freire
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Identifique las singularidades de las siguientes funciones complejas y clasifíquelas (singularidad removible, polo simple, polo de orden n o singularidad esencial):

- a) $\tan(z)$
- b) $\frac{z^2}{1+z^4}$
- c) $\frac{1}{1+z+z^2}$
- d) $e^{1/z}$

Pregunta 2

Sea f holomorfa en \mathbb{A} abierto que contiene a $z = 0$. Sea γ una curva contenida en \mathbb{A} y que encierra a $z = 0$. Calcule

$$\oint_{\gamma} \left(\frac{f(z)}{z^3} + iz^3 + \frac{2}{z} \right) f(z) dz$$

en términos de $f(0)$, $f'(0)$ y $f''(0)$.

Pregunta 3

Sea

$$f(z) = \frac{e^{2z} \sin(z)}{z^3(z+i)}$$

Determine sus ceros y polos (con sus órdenes) f . Además calcule

$$I = \oint_{\gamma} f(z) dz$$

donde $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1 - i| = r \geq 0\}$

Pregunta 4 (extra)

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}$$

Este es un resultado absurdo, pero que no obstante tiene una razón de ser. Para eso, vamos a revisar la función Zeta de Riemann, que se define preliminarmente por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

donde $s \in \mathbb{C}$ (vamos a usar s para la variable de la función porque después tendremos un z que se usará para integrar).

Mediante una serie de pasos que pueden ver en el siguiente [artículo](#) es posible llegar a una expresión integral alternativa para la función Zeta de Riemann dada por:

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^{\frac{1}{z}} - 1} dz \quad (1)$$

donde $\Gamma(n) = (n-1)!$ para $n \in \mathbb{Z}^+$ (función gamma) y C es un contorno (llamado contorno de Hankel) el cual desde el infinito pasa por abajo del eje real, a una distancia ϵ positiva que se hará muy pequeña, luego da una media vuelta rodeando el origen en un semicírculo de radio ϵ , para finalmente ir hasta infinito a una distancia ϵ sobre el eje real.

Para evaluar la integral, definimos un nuevo contorno D , el cual se puede ver en la Figura 1, donde el radio grande es $R = (2N+1)\pi$, con N entero y grande.

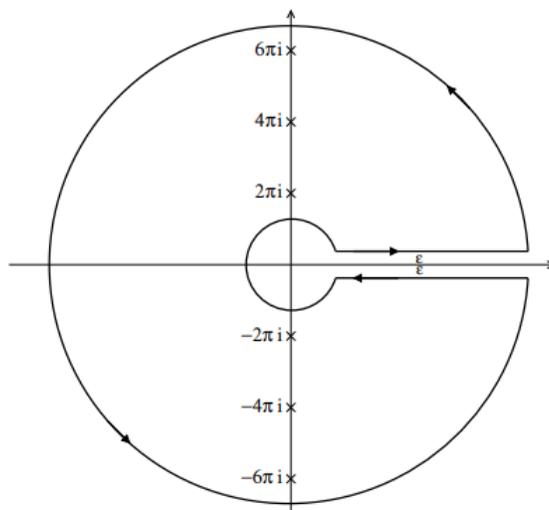


Figura 1: Contorno D .

Notamos que D se conforma por la unión entre el círculo grande y el contorno C . De esta manera, también se puede demostrar que la integral asociada al círculo grande se va a 0 cuando $R \rightarrow \infty$, por lo tanto

$$\int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^{\frac{1}{z}} - 1} dz = \oint_D \frac{(-z)^{s-1}}{e^{\frac{1}{z}} - 1} dz$$

Teniendo ahora sí una expresión para calcular la integral en un camino cerrado. Evalúe la integral en D con residuos y utilizando la ecuación (1) y el siguiente resultado

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

concluya que $\zeta(-1) = -1/12$.

Noten que hemos demostrado que la función Zeta, extendida analíticamente al plano complejo evaluada en -1 vale $-1/12$. Esta función Zeta se puede escribir como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ solo para $\text{Re}(s) > 1$, por lo que no hemos demostrado que $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -1/12$, lo cual ya sabíamos que era falso. Sin embargo, en algunos contextos físicos esto se utiliza (efecto Casimir).

Integración compleja

Fórmula de Cauchy: Sea f una función continua en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y holomorfa en $\Omega - \{z_0\}$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{D}(z_0, r) \subseteq \Omega$. Entonces para todo $z \in D(z_0, r)$ se cumple que:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z_0} dw$$

Singularidad: Decimos que $p \in \mathbb{C}$ es singularidad de $f(z)$ si f no es holomorfa en p , y en todo entorno de p existen puntos donde la función es holomorfa.

Singularidad aislada: Decimos que $p \in \mathbb{C}$ es singularidad aislada de $f(z)$ si f no es holomorfa en p , y existe un radio $R > 0$ tal que f es holomorfa en $D(p, R) \setminus \{p\}$.

Singularidad evitable: $p \in \mathbb{C}$ se dice singularidad evitable si es singularidad aislada y $L_0(p) = \lim_{z \rightarrow p} f(z)$ existe.

Polo: $p \in \mathbb{C}$ es un polo de $f(z)$ si p es un punto singular aislado de $f(z)$ y existe $m \geq 1$ entero tal que $L_m(p) = \lim_{z \rightarrow p} (z - p)^m f(z)$ existe y no es igual a 0. Al menor m que cumpla esto le llamamos el orden de p . En particular, p es polo simple si es polo de orden $m = 1$.

Residuo: Definimos para p un polo de orden m , su residuo como

$$\text{Res}(f, p) = \lim_{z \rightarrow p} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-p)^m f(z))$$

que corresponde al coeficiente c_{m-1} de la serie de Laurent de f en torno a p .

Teorema de los Residuos: Sea f una función meromorfa en Ω y P sus polos. Sea Γ un camino simple y cerrado, recorrido en sentido antihorario, que encierra una región $D \subseteq \Omega$ tal que $\Gamma \cap P = \emptyset$. Entonces Γ encierra un número finito de polos de f , digamos $P \cap D = \{p_1, \dots, p_n\}$ y más aún

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, p_j)$$