

Determinemos la expansión en serie de potencias de

Recomendación:

Intentaremos evitar el uso de la formula de coef $c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ puesto que implica derivar k veces una función (cosa para nada trivial) y reconocer patrones. De todas formas se puede ocupar cuando ya no quede de otra.

a) $\sinh(z)$ en torno a $z=0$

Por definición:

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad (*)$$

y además sabemos que

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \Rightarrow e^{-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k!}$$

Reemplazando en (*):

$$\begin{aligned} \sinh(z) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(z^k - (-z)^k \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(z^k - (-1)^k z^k \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{\left(1 - (-1)^k \right)}_{= \begin{cases} 0 & k \text{ par} \\ 2 & k \text{ impar} \end{cases}} z^k \end{aligned}$$

$k=2n+1$

$$\downarrow = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Mientras que su radio de convergencia según el criterio del cociente es $(c_n = \frac{1}{(2n+1)!})$

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n+2)!}{(2n+1)!} \right| \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n+2)(2n+1)!}{(2n+1)!} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} |2n+2|$$

$$\rightarrow \infty$$

$\Rightarrow R$ es ∞ y por tanto $\sinh(z)$ es analítica $\forall z \in \mathbb{C}$

b) $\log(z)$ en torno a $z=1$

Debemos llegar a algo del estilo

$$\log(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-1)^k$$

punto sobre el cual se calcula la serie
 $\downarrow$ k

Por otra parte sabemos que $\int \frac{1}{z} dz = \log(z)$ y tenemos expresiones en serie para $\frac{1}{z}$ (o relacionadas) partiendo de la serie geométrica:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

$w = 1-z$
 $\Rightarrow z = 1-w$

$$\frac{1}{w} = \sum_{k=0}^{\infty} (1-w)^k$$

$$\frac{1}{w} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (w-1)^k$$

$\int dw$

$$\int \frac{1}{w} dw = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\int (w-1)^k dw \right]$$

$$\Rightarrow \log(w) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(w-1)^{k+1}}{k+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (w-1)^n$$

* la serie es uniformemente convergente
 $\Rightarrow \int$ intercambia con $\sum$

$$k+1 = n \Rightarrow k = n-1$$

importante
 $k=0 \Rightarrow n=0+1=1$

c_n

Como w es variable muda (podemos ponerle z también)

sigue la serie de $\log(z)$ es:

$$\log(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$$

Calculemos su radio de convergencia $(c_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n})$

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{(n+1)}{(-1)^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \log(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{1}{(z-1)^n} \quad \forall z \in D(\overset{\text{centro}}{\downarrow} 1, \overset{\text{radio}}{\downarrow} 1)$$

c) $\frac{2z+3}{z+1}$ en torno a $z=1$

Como el punto de prueba es 1 definimos $z-1=w$

$\Rightarrow z = w + 1$. Reemplazando

$$\begin{aligned}\frac{2z+3}{z+1} &= \frac{2(w+1)+3}{w+2} \\ &= \frac{2w+5}{2+w} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(2w+5)}{1 - \left(-\frac{w}{2}\right)}\end{aligned}$$

Recordamos serie geometrica $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Por lo tanto:

$$\frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{w}{2}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{w}{2}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} w^n$$

radio de convergencia

$$\left| \frac{w}{2} \right| < 1$$

$$|z-1| < 2$$

Moltiplicando per $2w+5$

$$\frac{1}{2} \frac{(2w+5)}{1 - (-\frac{w}{2})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} 2w^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5(-1)^n}{2^{n+1}} w^n$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} w^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5(-1)^n}{2^{n+1}} w^n \\
&\quad \text{K=n+1 luego K=n indices mudos} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} w^n + \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5(-1)^n}{2^{n+1}} w^n \\
&= \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{5(-1)^n}{2^{n+1}} \right) w^n \\
&= \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^{n-1} + 5(-1)^n}{2^n} \right) w^n \\
&= \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \left(\frac{5}{2} - 2 \right) w^n = \frac{5}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} w^n
\end{aligned}$$

Como $w = z - 1$:

$$\frac{2z+3}{1+z} = \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-1)^n$$

d) $\arctan(x)$ en torno a $x=0$.

Usando que

$$\ln(1+ix) = \ln(\sqrt{x^2+1}) + i \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right) = \arctan(x)$$

$$\Rightarrow \arctan(x) = \operatorname{Im}(\ln(1+ix))$$

calcular esto expandiendo usando el item (b)

P₂

Pdg/Sea f analítica con C que encierra a z_0 entonces

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} dw$$

Para empezar el problema empecemos con las hipótesis. En particular sabemos que f es analítica y por tanto se puede expandir como serie de potencias, es decir

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-z_0)^k$$

$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ coefs = RHS

También sabemos que por formula integral de Cauchy:

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{D(z_0, R)} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \left(\frac{w-z_0}{w-z_0} \right) \text{ para formar lo que queremos} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{D(z_0, R)} \frac{f(w)}{(w-z_0)} \frac{w-z_0}{(w-z)} dw \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{D(z_0, R)} \frac{f(w)}{(w-z_0)} \left(\frac{1}{\frac{w-z}{w-z_0}} \right) dw
 \end{aligned}$$

expandamos esto al detalle

Sea $y = \left(\frac{w-z}{w-z_0} \right)$ expandiendo

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{y} &= \sum_{n=0}^{\infty} (1-y)^n \quad / \text{ en } P_1(b) \text{ demostración} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{w-z}{w-z_0} \right)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\cancel{w-z_0} - (\cancel{w-z})}{w-z_0} \right)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^n
 \end{aligned}$$

Reemplazando

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{D(z_0, R)} \frac{f(w)}{(w-z_0)} \left(\frac{1}{y} \right) dw \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{D(z_0, R)} \frac{f(w)}{(w-z_0)} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^n \right] dw \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{D(z_0, R)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw}_{= C_k} \right) (z-z_0)^n
 \end{aligned}$$

intercambio
de integral y
sumatoria
(la serie es
convergente
en $D(z_0, R)$)

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \oint_{D(z_0, R)} \frac{f(w)}{(w-z_0)} dw = C_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

P₃

Sea $\log: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Si $z = re^{i\theta}$ $\theta \in (-\pi, \pi]$, $r > 0$ entonces $\log(z)$ se define como.

$$\log(z) = \ln(r) + i\theta \quad (\text{ver aux 5 P3.b})$$

a) Sea $R > 0$

Pdg

$$\oint_{\partial B(0,R)} \log(z) dz = -2\pi i R$$

Las integrales complejas, al igual que en $\mathbb{R}^n$, se resuelven parametrizando curvas. En este caso la curva que tenemos es una circunf. de radio R la cual puede ser parametrizada por el cv $z = Re^{i\theta} \Rightarrow dz = iRe^{i\theta} d\theta$ $\theta \in (-\pi, \pi]$
Por lo tanto:

$$\oint_{\partial B(0,R)} \log(z) dz = \int_{-\pi}^{\pi} \log(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} [\ln(R) + i\theta] iRe^{i\theta} d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{iR \ln(R)}_{\text{ctes para la integral en } \theta} e^{i\theta} d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{i^2 R}_{\text{ctes}} \theta e^{i\theta} d\theta$$

primitivas reales se mantienen en $\mathbb{C}$ (cuando no se encierran singularidades)

$$= iR \ln(R) \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta} d\theta - R \int_{-\pi}^{\pi} \theta e^{i\theta} d\theta$$

$$= iR \ln(R) \frac{1}{i} e^{i\theta} \Big|_{-\pi}^{\pi} - R \left(\frac{\theta e^{i\theta} + i e^{i\theta}}{i} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

IPP (integración por partes)

$$= R \ln(R) (e^{i\pi} - e^{-i\pi}) + Ri (\pi e^{i\pi} + e^{i\pi} - (-\pi) e^{-i\pi} - e^{-i\pi})$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$$= 2\pi R i e^{i\pi} = -2\pi R i$$

b) Si $\log(z)$ fuera holomorfa en $B(0, R)$, en virtud del Teo de Cauchy-Goursat:

$$\oint_{\partial B(0, R)} \log(z) dz = 0 \neq -2\pi Ri$$

$\Rightarrow$ contradicción?

En realidad no hay contradicción puesto que $\log(z)$ no es holomorfa en $\mathbb{R}^-$, puntos pertenecientes a $B(0, R)$.

P4 $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n$

a) Pdg f es holomorfa en $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

Primero notamos que:

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{\alpha!}{(\alpha-n)!n!} = \binom{\alpha}{n}$$

Introduciendo el 1 en la sumatoria y considerando que $\binom{\alpha}{0} = 1$, entonces:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{\alpha}{n}}_{= c_n \text{ coefs de la serie de potencias}} z^n$$

Se sabe que toda función que se expresa como serie de potencias es holomorfa en el radio de convergencia dado por:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$$

$$\Rightarrow R = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$$

$$= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{\alpha}{n}}{\binom{\alpha}{n+1}}$$

$$= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha!}{(\alpha-n)!n!} \cdot \frac{(\alpha-n-1)!(n+1)!}{\alpha!} \right|$$

$$= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{\alpha-n} \right|$$

$$= 1$$

Se puede escribir como serie de potencias

f analítica en $D(0, 1)$
 $\Rightarrow f$ holomorfa en $D(0, 1)$

b) Pdg $f'(z) = \frac{\alpha f(z)}{1+z}$, $z \in D$

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$$

$$\Rightarrow f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n z^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha!}{(n-1)! (n-1)!} z^{n-1}$$

$$\stackrel{k=n-1}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha!}{(n-1)! (n-1)!} z^{n-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha!}{(\alpha-k-1)! k!} z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha-k) \frac{\alpha!}{(\alpha-k)! k!} z^k$$

$$f'(z) = \underbrace{\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k}_{= f(z)} - \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} z^k}_{\text{parecido a } f'(z)}$$

(*)

En efecto:

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} k z^{k-1} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} k z^k$$

no hace nada
añadir el primer termino

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} k z^k = z f'(z)$$

Reemplazando en (*):

$$f'(z) = \alpha f(z) - z f'(z)$$

$$\Rightarrow f'(z) = \alpha \frac{f(z)}{1+z}$$

c) Pdg que la derivada de $(1+z)^{-\alpha} f(z)$ es 0.

En efecto:

$$\frac{d}{dz} \left((1+z)^{-\alpha} f(z) \right) = \frac{-\alpha}{(1+z)^{\alpha+1}} f(z) + f'(z) (1+z)^{-\alpha}$$

$$= \frac{-\alpha}{(1+z)^{\alpha+1}} f(z) + \frac{\alpha f(z)}{(1+z)^{\alpha+1}} \quad \left(f'(z) = \frac{\alpha f(z)}{1+z} \right)$$

$$= 0$$

d) El item anterior implica que

$$(1+z)^{-\alpha} f(z) = cte = C$$

$$\Rightarrow f(z) = C(1+z)^\alpha$$

Y de $f'(z) = \frac{d}{dz} (C(1+z)^\alpha) = \alpha \frac{f(z)}{1+z}$ es fácil verificar que $C=1$,
concluyendo el resultado.