Auxiliar 6

Series de potencia e introducción a integración compleja

Profesor: Ricardo Carlos Freire
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Determine la expansión en serie de potencias de las siguientes funciones:

a) $\sinh(z)$ en torno a $z = 0$

b) $\log(z)$ en torno a $z = 1$

c) $\frac{2z+3}{z+1}$ en torno a $z = 1$

d) **(Propuesto)** $\arctan(x)$ en torno a x=0, $x \in \mathbb{R}$

Además calcule sus radios de convergencia.

Pregunta 2

Demuestre que para una función analítica se cumple

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{D_R(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} \, dw$$

Indicación: Puede ser útil partir desarrollando a partir de la formula integral de Cauchy.

Pregunta 3

Considere la función $\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definida por (recuerde que todo número complejo no nulo se puede escribir en su forma polar como $z = re^{i\theta}$, donde $r \geq 0$ es el radio y $\theta \in (-\pi, \pi]$ es el argumento principal de z):

$$\log z = \ln r + i\theta$$

la cual es holomorfa cuando está restringida a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

a) Sea $R > 0$. Muestre que, al orientar $\partial B(0, R)$ de forma positiva,

$$\oint_{\partial B(0,R)} \log z \, dz = -2\pi i R$$

b) Dado que $\log z$ es holomorfa y que $\partial B(0, R)$ es una curva cerrada, ¿el valor de la integral encontrada en el ítem anterior contradice el teorema de Cauchy-Goursat? Justifique.

Pregunta 4 (propuesto)

Considere

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n-1)}{n!} z^n$$

a) Pruebe que f es holomorfa en $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

b) Pruebe que

$$f'(z) = \frac{\alpha f(z)}{1+z}, \quad z \in D$$

c) Pruebe que la derivada de $(1+z)^{-\alpha} f(z)$ es 0.

d) Concluya que $f(z) = (1+z)^{\alpha}$

Series de potencia

[Función analítica]: Una función $f(z)$ definida en un conjunto Ω de números complejos es analítica si puede expresarse localmente como una serie de potencias. Formalmente, $f(z)$ es analítica en $z_0 \in \Omega$ si existe un disco $D_r(z_0)$ centrado en z_0 con radio $R > 0$ tal que:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

para todo z en $D_r(z_0)$, donde los coeficientes c_k se calculan como:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

En otras palabras, una función analítica es su propia serie de Taylor (también llamada serie de Laurent en el contexto complejo) en su dominio de definición. Algunas expansiones conocidas son:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0} z^k$$

[Criterio de radios de convergencia]: Dada una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$, para encontrar el radio de convergencia R de la serie se ocupan los siguientes criterios:

- **Criterio del cociente**

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right|$$

- **Criterio de la raíz enésima (o Hadamard)**

$$R = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$$

El radio de convergencia determina la zona en donde la función f es analítica (i.e. derivadas de todos los órdenes en $D_R(z_0)$).

[Teorema de Cauchy-Goursat]: Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa, con Ω abierto simplemente conexo, entonces

$$\oint_{\Gamma} f(z)\, dz = 0$$

para toda curva cerrada, simple y regular en Ω.

[Fórmula de Cauchy]: Sea f una función continua en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y holomorfa en $\Omega - \{z_0\}$. Sea $R > 0$ tal que $\overline{\mathbb{D}}_R(z_0) \subset \Omega$. Entonces, para todo $z \in D_R(z_0)$ se cumple que:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

donde γ es una curva simple y cerrada contenida en $D_R(z_0)$.