P_1

Tenemos $f(z) = u(r,\theta) + i v(r,\theta) = u(x,y) + i v(x,y)$ $(*)$

Expresando en forma polar z:

$$z = re^{i\theta} = r(\cos + i\sin\theta) = \underbrace{r\cos\theta}_{x(r,\theta)} + \underbrace{ir\sin\theta}_{y(r,\theta)}$$

Expresando u y v en coordenadas polares:

$$u(x,y) = u(x(r,\theta), y(r,\theta)) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$v(x,y) = v(x(r,\theta), y(r,\theta)) = v(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Ahora de $(*)$:

$$u(r,\theta) = u(x,y) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$$
$$v(r,\theta) = v(x,y) = v(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

¿Qué sabemos? Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ con $z = x + yi$, es holomorfa en $\Omega \Rightarrow$ se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}} \qquad \boxed{\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

- $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\underbrace{\dfrac{\partial}{\partial r}(r\cos\theta)}_{\cos\theta} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\underbrace{\dfrac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta)}_{\sin\theta}$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta \quad (1)$$

- $\dfrac{\partial v}{\partial \theta} = \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} = \underbrace{\dfrac{\partial v}{\partial x}}_{-\frac{\partial u}{\partial y}}(-r\sin\theta) + \underbrace{\dfrac{\partial v}{\partial y}}_{=\frac{\partial u}{\partial x}}(r\cos\theta)$

por CR

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial y}(r\sin\theta) + \frac{\partial u}{\partial x}(r\cos\theta)$$
$$= r\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right)}_{=\frac{\partial u}{\partial r}}$$

por (1)

$$\therefore \boxed{\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial r}}$$

Ahora la otra condición:

- $\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta} \quad (2)$$

- $\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\frac{\partial v}{\partial y}}(-r\sin\theta) + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{-\frac{\partial v}{\partial x}}(r\cos\theta)$

$$= -r\underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta\right)}_{=\frac{\partial v}{\partial r}}$$

$$\boxed{\therefore \ \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}}$$

P_2

a) $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

Pdq) f y $\bar{f}$ holomorfas $\Rightarrow$ f es cte

$f = u(x,y) + i\,v(x,y) \ / \ (u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\bar{f} = u(x,y) - i\,v(x,y) = u(x,y) + i\,\tilde{v}(x,y)$ $\qquad \tilde{v} = -v$

Recordamos que:

f holomorfa $\Rightarrow$ f satisface C-R

Veamos C-R para f y $\bar{f}$

f:

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ (1)

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ (3)

$\tilde{f}$:

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y}$ (2)

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}$ (4)

Igualando (1) y (2):

$$\frac{\partial u}{\partial x} \overset{(1)}{=} \frac{\partial v}{\partial y} \overset{(2)}{=} -\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$2\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \xRightarrow{\int dy} v(x,y) = c_1(x)$$

A diferencia de las EDOS (1 var.) al integrar una parcial las ctes dependen de la otra variable

Usando esto en (3) y (4)

$$\frac{\partial u}{\partial y} \underset{(3)}{=} -\frac{\partial v}{\partial x} \underset{(4)}{=} \frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow 2\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$2C_1'(x) = 0$$

$$C_1 \equiv k_1 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow v(x,y) = k_1 \in \mathbb{R}$$

Ahora falta $u(x,y)$. Volviendo a las eccs:

$$\frac{\partial v}{\partial y} \underset{(1)}{=} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \cancel{2}\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \overset{\int dx}{\Rightarrow} u(x,y) = C_2(y)$$

Usando esto en (3) y (4):

$$\frac{\partial v}{\partial x} \underset{(3)}{=} -\frac{\partial u}{\partial y} \underset{(4)}{=} \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \cancel{2}\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$C_2'(y) = 0$$

$$C_2 = k_2 \in \mathbb{R}$$

Concluimos que $f = u + iv = k_2 + ik_1 = cte$

b) Sea $u(x,y) = g(x+y)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suficientemente derivable

¿Qué tipo de función g puede ser la parte real de una función f holomorfa?

f debe cumplir C-R si es holomorfa $(f = u(x,y) + iv(x,y))$

Claim f holomorfa $\Rightarrow$ se cumple C-R (de acá en adelante ocuparé sub-indices para las derivadas ej: $\frac{\partial}{\partial x}u = u_x$)

$$u_x = v_y \overset{\frac{\partial}{\partial x}}{\Rightarrow} u_{xx} = v_{yx}$$

$$u_y = -v_x \underset{\frac{\partial}{\partial y}}{\Rightarrow} u_{yy} = -v_{xy} = -v_{yx} \quad \frac{\partial}{\partial x \partial y}(\,) = \frac{\partial}{\partial y \partial x}(\,)$$

$$\therefore \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

Analogamente para V:

$$U_x = V_y \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} U_{xy} = V_{yy}$$
$$U_y = -V_x \xRightarrow[\frac{\partial}{\partial x}]{} -U_{yx} = V_{xx}$$

$$\therefore \Delta V = V_{xx} + V_{yy} = U_{xy} - U_{yx} = 0$$

Se dicen que u y v son armonicas $(\Delta(\,)=0)$ para cualquier f holomorfa

$$u(x,y) = g(x+y)$$

1 $$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= g'(x+y)\frac{\partial(x+y)}{\partial x} \nearrow 1 \\ &= g'(x+y) \end{aligned} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx} = g''(x+y)}$$

2 $$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= g'(x+y)\frac{\partial(x+y)}{\partial y} \nearrow 1 \\ u_y &= g'(x+y) \end{aligned} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{yy} = g''(x+y)}$$

1 + 2 $$u_{xx} + u_{yy} = \Delta u \overset{!}{=} 0 = 2g''(x+y)$$

ya que u debe ser armonica si es $Re(f)$

Sea $z = x+y$:

$$g''(z) = 0$$
$$\xRightarrow[\int dz]{\int dz} \quad g'(z) = C_1$$
$$\Rightarrow \quad g(z) = C_1 z + C_2$$

Vale decir g debe tener la sgte forma:

$$g(x+y) = C_1(x+y) + C_2$$

Hecho esto buscamos condiciones sobre f:

$$f(x,y) = u(x,y) + iV(x,y)$$

$$= C_1(x+y) + C_2 + iV(x,y) \quad / \text{ya que } u(x,y) = g(x+y)$$

Usamos C-R para ver cómo es $v(x,y)$.

De la primera condición $\quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(C_1(x+y) + C_2\right)$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = C_1 \cancel{\frac{\partial}{\partial x}(x+y)}^{1} = C_1$$

$$\overset{\int dy}{\Longrightarrow} \quad \boxed{V(x,y) = C_1 y + C_3(x)} \quad (3)$$

Aplicando la otra condición:

$$\frac{\partial}{\partial x}V = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\partial}{\partial y}\left(C_1(x+y) + C_2\right)$$

(3)

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(C_1 y + C_3(x)\right) = -C_1 \cancel{\frac{\partial}{\partial y}(x+y)}^{1}$$

$$C_3'(x) = -C_1$$

Lo que sí es una EDO. Integrando r/a x:

$$C_3(x) = -C_1 x + C_3$$

Reemplazando en (3):

$$V(x,y) = C_1 y - C_1 x + C_3 = C_1(y-x) + C_3$$

Sigue que f debe tener la sgte forma:

$$f(z) = f(x,y) = u + iv = C_1(x+y) + C_2 + i\left(C_1(y-x) + C_3\right)$$

$$= \underline{C_1 x} + \underline{C_1 y} + \underline{C_2} + \underline{iC_1 y} - \underline{iC_1 x} + \underline{iC_3}$$

$$= \underbrace{C_2 + iC_3}_{\equiv\, z_0}$$

$$= z_0 + C_1(x + iy + y - ix)$$

$$= z_0 + C_1\left(z + (-i)(x+iy)\right)$$

$$= z_0 + C_1(z - iz)$$

$$\boxed{= z_0 + C_1(1-i)z}$$

P3 [$\mathbb{C}$ es mucho más que resolver cuadráticas]

a) Se pide resolver en $\mathbb{C}$ la sgte ecuación:

$$\underline{e^{z} = \cos(iz)}$$

De la formula de euler es posible demostrar que:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

ya que si $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, entonces:

$$\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{\cos\theta \cancel{+i\sin\theta} + \cos(\theta) \cancel{-i\sin\theta}}{2} = \frac{\cancel{2}\cos\theta}{\cancel{2}}$$

Ocupando esto en la ec a resolver:

$$\cos(iz) = \frac{e^{\cancel{i^2}z} + e^{\cancel{i^2}z}}{2} = e^{iz}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} = e^{z}$$

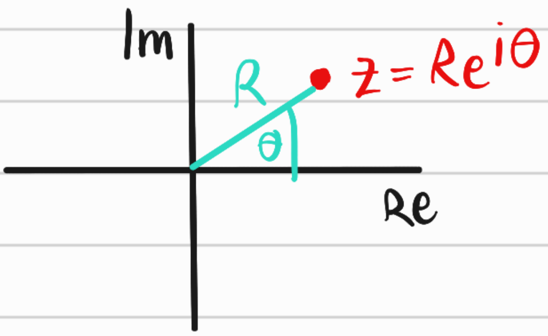
$$e^{z} + e^{-z} = 2e^{z}$$

$$\frac{1}{e^{z}} = e^{z}$$

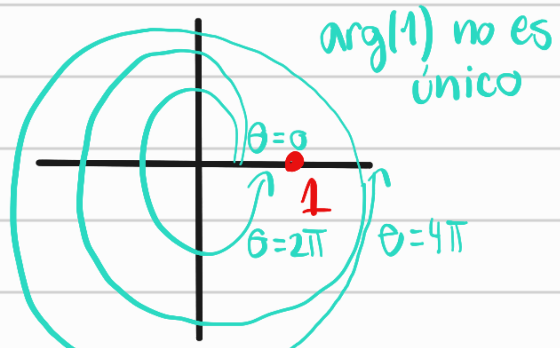
$$\Rightarrow \boxed{e^{2z} = 1} \quad (*)$$

Llegado a este punto parece más o menos claro que $z=0$ es solución a la ecuación, pero ¿es la única solución? Para verlo recordemos la forma polar de representar números complejos:

$$z = |z| e^{i\arg(z)} = Re^{i\theta} \qquad / |z| = R \quad \arg(z) = \theta$$



$$\overset{z=1}{\Longrightarrow}$$



$$\therefore 1 = e^{i2k\pi} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Reemplazando esto en (*):

$$e^{2z}=e^{i2k\pi} \xrightarrow{\ln} \cancel{2}z=\cancel{2}k\pi i$$

$$\Rightarrow \boxed{z_k = k\pi i} \quad k\in\mathbb{Z}$$

Soluciones de la ecuación $e^z=\cos(iz)$

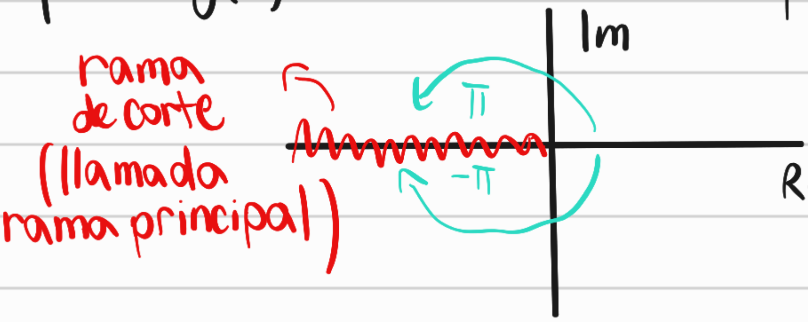
b) Para extender el logaritmo a los complejos queremos mantener sus buenas propiedades, en particular ser función inversa de e^z ya bien definida. Para ello ocupamos la forma polar $z=Re^{i\theta}$:

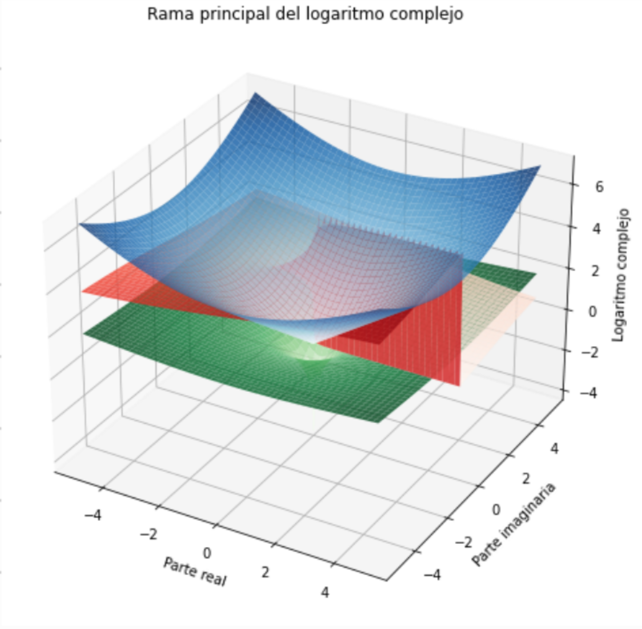
$$\log(z)=\log(Re^{i\theta})$$
$$=\underbrace{\log(R)}_{\substack{R\in\mathbb{R} \text{ por lo que definimos} \\ \text{esto simplemente como } \ln(R)}} + \underbrace{\log(e^{i\theta})}_{\substack{\log(e^z)=z \text{ por} \\ \text{def de fn inversa}}}$$

$$\Rightarrow \log(z)=\underset{\substack{\| \\ |z|}}{\ln(R)}+i\underset{\substack{\| \\ \arg(z)}}{\theta}$$

Si $z=x+iy \Rightarrow |z|=\sqrt{x^2+y^2} \wedge \arg(z)=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

No obstante hay un problema con esta definición pues al dar vueltas en el plano complejo $(\theta=\theta_0+2k\pi)$, la parte asociada al ángulo del logaritmo aumenta sin restricción lo que causa que de un pto salgan 2 salidas (ya que hay ∞ formas de describir el ángulo). La solución a ello es restringir el ángulo a intervalos acotados. El corte más usado es $\theta\in(-\pi,\pi)$ lo que causa que $\log(z)$ sólo esté definido para $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$.





$Re(\log(z))$
$|\log(z)|$
$Im(\log(z))$

c) El objetivo de esta pregunta es ver que cosas que no están bien definidas en los reales tales como x^α, con $x<0$ y $0<\alpha<1$; sí se pueden definir en los complejos.
Usando la indicación:

$$(-1)^\alpha = \exp(\alpha \underbrace{\log(-1)}) \quad (\star)$$

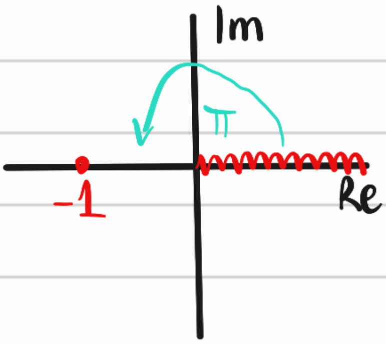
no está definido en $\mathbb{R}$. Que bueno que en el item anterior extendimos su def a $\mathbb{C}$

Calculando $\log(-1)$ aparte usando la regla del item anterior:

$$\log(-1) = \underbrace{\ln|\cancel{1}|}_{0} + i\arg(-1)$$

$$= i\arg(-1)$$

En principio hay ∞ ángulos para representar a -1, no obstante nos ceñimos a una rama para que log efectivamente sea función. Sea $\theta \in (0, 2\pi)$



$$\Rightarrow \log(-1) = i\overset{\pi}{\overset{=}{\arg(-1)}} = i\pi$$

Reemplazando en $(\star)$:

$$(-1)^\alpha = \exp(\alpha \underbrace{\log(-1)}_{i\pi}) = \boxed{e^{i\alpha\pi}}$$