Auxiliar 5

Variable compleja

Profesor: Ricardo Carlos Freire
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, con $\Omega \neq \emptyset$ abierto, holomorfa en Ω. En coordenadas polares se tiene que $z = re^{i\theta}$ y que f puede ser escrito como $f = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ con u y v diferenciables. Pruebe que las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares toman la forma

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} && (1)\\ \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} &= -\frac{\partial v}{\partial r} && (2)\end{aligned}}$$

Pregunta 2

a) Sea una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Demuestre que si f y $\overline{f}$ son holomorfas, entonces f es una función constante.

b) Sea $u(x, y) = g(x + y)\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, donde g es una función real suficientemente diferenciable. ¿Para cuáles g la función u corresponde a la parte real de una función holomorfa f? Identifique f en estos casos.

Pregunta 3

a) Resuelva la ecuación $e^z = \cos(iz)$.

b) Compruebe que la forma de extender el logaritmo como función inversa de e^z en los complejos está dado por

$$\log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$$

con $|z|$ el modulo de z y $\arg(z)$ su argumento (ángulo respecto al eje real). Comente respecto a posibles problemas en la definición de esta función.

c) Usando el hecho de que en los reales

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$$

halle el valor de $(-1)^\alpha$ (con $0 < \alpha < 1$) en los complejos, eligiendo una rama de corte adecuada para el logaritmo complejo.

Variable compleja

Representación en forma polar de un número complejo: Un número complejo $z = x + iy$ puede ser representado en forma polar como $z = re^{i\theta}$, donde r es el módulo o la magnitud de z y θ es el argumento de z. Para calcular r y θ a partir de x e y, usamos las siguientes fórmulas:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0 \text{ y } y \geq 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{si } x < 0 \text{ y } y < 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y < 0, \\ \text{indeterminado} & \text{si } x = 0 \text{ y } y = 0. \end{cases}$$

Función Compleja: Decimos que $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función compleja. Usualmente, se denota $f(z)$, con $z = x+iy$, como $f(z) = f(x+iy) = u(x, y)+iv(x, y)$ con u, v funciones de $\mathbb{R}^2$.

Continuidad: Sea f una función compleja, decimos que f es continua en z_0 si y solo si u y v son continuas en z_0. Notemos que, para funciones complejas, operaciones de álgebra y composición de continuas es continua.

Derivabilidad: Dado $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, decimos que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es derivable en $z_0 \in \Omega$ (en el sentido complejo) si el límite:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Se denota por $f'(z_0)$.

Ecuaciones de Cauchy-Riemann: Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función compleja. Decimos que f es derivable si y solo si u, v son diferenciables en $z_0 = (x_0, y_0)$ y se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Función Holomorfa: Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función compleja, con Ω su dominio y $z_0 = x_0+iy_0 \in \Omega$. Decimos que f es holomorfa en z_0 si f es derivable en una vecindad de z_0.