

Auxiliar 4

Preparación C1

Profesor: Ricardo Carlos Freire

Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Sean

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y(x^2 + y^2)^{3/2}, -x(x^2 + y^2)^{3/2}, z + 1)$$

y S la frontera de la región sólida acotada superiormente por el plano $z = 2x$ e inferiormente por el paraboloides $z = x^2 + y^2$. Calcular

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS$$

Pregunta 2

Sea Γ una curva simple, regular por trozos contenida en el plano XY . Suponga que Γ está parametrizada en coordenadas polares vía la relación $r = f(\theta)$, es decir:

$$x(\theta) = f(\theta) \cos \theta, \quad y(\theta) = f(\theta) \sin \theta \quad \theta \in [a, b] \subset [0, 2\pi)$$

donde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ es clase \mathcal{C}^1 y 2π -periódica. Sea D la región encerrada por Γ y las rectas $y = m_a x$ e $y = m_b x$, que unen los extremos de Γ con el origen y cuyas pendientes son las asociadas a los ángulos a y b . Pruebe que

$$A(D) = \frac{1}{2} \int_a^b (f(\theta))^2 d\theta$$

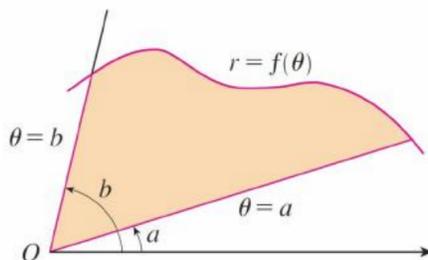


Figura 1: Región D .

Pregunta 3

Calcule $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS$ siendo \mathbf{F} el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - z, x^2 + yz, -3xyz)$ y S la superficie del cono $x = 2 - \sqrt{y^2 + z^2}$ que queda en el primer octante ($x, y, z \geq 0$) y $\hat{\mathbf{n}}$ es la normal exterior al volumen sólido acotado entre el primer octante y el cono.

Pregunta 4

Considere el siguiente campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (3x^2y - 3z + e^x \sin z) \hat{i} + x^2 \hat{j} + (e^x \cos z - 3x) \hat{k}$$

- Calcule $\nabla \times \vec{F}$.
- Considere la curva Γ definida por

$$\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos(t)) = \hat{\rho} + \cos(t) \hat{k}$$

con $t \in [0, 2\pi]$. Calcule el trabajo realizado por \vec{F} en la curva Γ cuando se recorre positivamente.

Coordenadas ortogonales

Sistema de coordenadas curvilíneas: Sea $\mathbf{R} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ suficientemente diferenciable e invertible tal que a cada $(u, v, w) \in D$ le corresponde un punto $(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \in \mathbb{R}^3$.

Sistema ortogonal: Sea \mathbf{R} un sistema de coordenadas. Se dice que \mathbf{R} es ortogonal si los vectores

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}, \quad \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}, \quad \mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial w},$$

son mutuamente ortogonales.

Factores escalares:

$$h_u = \left\| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \right\|, \quad h_v = \left\| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} \right\|, \quad h_w = \left\| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial w} \right\|.$$

Representación de un campo vectorial en otro sistema: Sea $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 , Ω abierto y \mathbf{R} un sistema de coordenadas. Se define:

$$F_u = F_u(u, v, w) = \mathbf{F}(\mathbf{R}(u, v, w)) \cdot \hat{\mathbf{u}}(u, v, w),$$

$$F_v = F_v(u, v, w) = \mathbf{F}(\mathbf{R}(u, v, w)) \cdot \hat{\mathbf{v}}(u, v, w),$$

$$F_w = F_w(u, v, w) = \mathbf{F}(\mathbf{R}(u, v, w)) \cdot \hat{\mathbf{w}}(u, v, w).$$

Se tiene que $\mathbf{F} = F_u \cdot \hat{\mathbf{u}} + F_v \cdot \hat{\mathbf{v}} + F_w \cdot \hat{\mathbf{w}}$.

Algunos sistemas de coordenadas

- Coordenadas cilíndricas: $\mathbf{R}(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$.
- Coordenadas esféricas: $\mathbf{R}(r, \theta, \phi) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$.

Operadores diferenciales en coordenadas ortogonales:

- Divergencia:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} := \frac{1}{h_u h_v h_w} \left(\frac{\partial}{\partial u} (F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v} (F_v h_u h_w) + \frac{\partial}{\partial w} (F_w h_u h_v) \right)$$

- Rotor:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \det \begin{pmatrix} h_u \hat{\mathbf{u}} & h_v \hat{\mathbf{v}} & h_w \hat{\mathbf{w}} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u F_u & h_v F_v & h_w F_w \end{pmatrix}$$

- Gradiente:

$$\nabla f = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \hat{\mathbf{w}}$$

Teoremas fundamentales

Integral de línea: La integral de línea de una función $\mathbf{F} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sobre Γ , parametrizada por la función $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ se calcula como

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(\tau)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} d\tau$$

Propiedad: $\mathbf{F} = -\nabla g \Rightarrow \oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$

Integral de flujo: La integral de flujo de una función $\mathbf{F} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sobre S , parametrizada por la función $\mathbf{r} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ se representa por

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iint_U \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv$$

donde $dS = \left\| \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \right\| du dv$.

Teorema de Stokes: Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular por trozos cuyo borde $\Gamma = \partial S$ es una curva cerrada, simple y regular por trozos. Sea $\mathbf{F} : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 tal que $\Lambda \supseteq S \cup \partial S$ con Λ abierto, entonces

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} \quad (1)$$

donde Γ se recorre en sentido antihorario con respecto a $\hat{\mathbf{n}}$ (se satisface regla de la mano derecha).

Teorema de Green (Stokes 2D): Aplicando el Teorema de Stokes para $S \subseteq \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{F} : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ entonces

$$\oint_{\partial S} P dx + Q dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Teorema de la divergencia (o Gauss): Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto acotado cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por trozos orientada según la normal exterior. Sea $\mathbf{F} : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 tal que $\Omega_0 \supseteq \Omega = \Omega \cup \partial\Omega$, entonces

$$\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV \quad (2)$$

donde para una parametrización $\mathbf{R}(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ del volumen

$$dV = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}.$$

Para un sistema ortonormal con factores escalares conocidos, el diferencial se calcula como $dV = h_u h_v h_w du dv dw$