P_1 $\quad F(x,y,z) = \left(y(x^2+y^2)^{3/2}, -x(x^2+y^2)^{3/2}, z+1\right)$

S frontera acotada sup. por $z=2x$ e inf. por $z=x^2+y^2$

Por teo de divergencia (se puede aplicar ya que $\vec{F}$ es clase C^1):

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS = \iiint_\Omega \nabla\cdot\vec{F}\,dV$$

Ω región encerrada por S. Calculemos $\nabla\cdot\vec{F}$ primero:

$$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y(x^2+y^2)^{3/2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-x(x^2+y^2)^{3/2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(z+1)$$
$$= \cancel{y\frac{3}{\cancel{2}}(x^2+y^2)^{1/2}\cancel{2}x} \cancel{-3xy(x^2+y^2)^{1/2}} + 1$$
$$= \boxed{1}$$

Por lo tanto:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \underbrace{\iiint_\Omega \underbrace{\nabla\cdot\vec{F}}_{1}\,dV}_{\text{volumen de }\Omega}$$

Parametricemos Ω (es un paraboloide cortado por el plano $z=2x$). Usando cilíndricas:

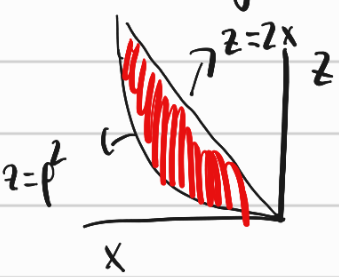
$$T(\rho,\theta,z) = (\underbrace{\rho\cos\theta}_{x}, \underbrace{\rho\sin\theta}_{y}, z)$$

Ω acotado por $\underbrace{x^2+y^2=z}_{①}$ (inf) y $\underbrace{z=2x}_{②}$ (sup) $\Rightarrow x^2+y^2 \leq z \leq 2x$

$\rho^2 \leq z \leq 2\rho\cos\theta$

$\Rightarrow z \in [\rho^2, 2\rho\cos\theta]$

Falta rango de ρ. Igualando ① y ② para ver cota superior



$\underbrace{x^2+y^2}_{} = z = \underbrace{2x}_{}$ (cota sup)

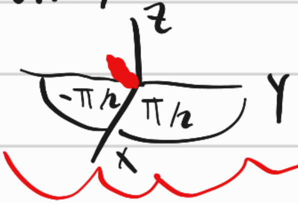
$\rho^{\cancel{2}} = 2\cancel{\rho}\cos\theta$

$\rho = 2\cos\theta \qquad (x-1)^2+y^2=1$

$\Rightarrow \rho \in [0, 2\cos\theta]$

Vistos los límites y usando que $dV = \rho\,d\rho\,d\theta\,dz$ en cilíndricas.

volumen en $x>0$ $\Rightarrow \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$



$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho\,d\rho \underbrace{\int_{\rho^2}^{2\rho\cos\theta} dz}$$
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho\,(2\rho\cos\theta - \rho^2)\,d\rho$$

$*$

$$\int \cos^4(\theta)\,d\theta = \int (\cos^2(\theta))^2\,d\theta = \int \left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)^2 d\theta = \frac{1}{4}\int\left(1+2\cos(2\theta)+\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \left[\int_0^{2\cos\theta} 2\rho^2\cos\theta\,d\rho - \int_0^{2\cos\theta}\rho^3\,d\rho\right]$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \left[2\cos\theta\,\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{2\cos\theta} - \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{2\cos\theta}\right]$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta\, \frac{16}{3}\cos^4\theta - \frac{16}{4}\cos^4\theta$$

$$\cancel{16}^{\,2}\underbrace{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)}_{\cancel{\frac{1}{12}}\ \cancel{4}\ 2}\underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta}_{\frac{3\pi}{\cancel{8}}} \overset{*}{=} \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

P_2

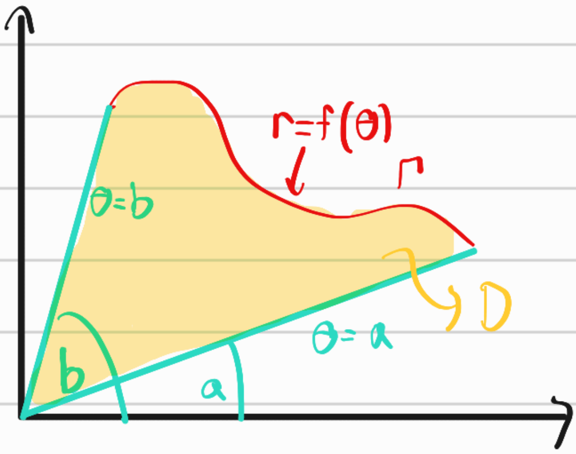
$\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ simple y regular por trozos. Su parametrización es:

$$x(\theta)=f(\theta)\cos\theta \quad y=f(\theta)\sin\theta \quad \theta\in[a,b]$$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ clase C^1 y 2π-periódica. D región que encierra Γ y rectas $y=m_a x$ e $y=m_b x$.

Pdq $\quad A(D)=\frac{1}{2}\int_a^b (f(\theta))^2\,d\theta$

El esquema es el siguiente



El problema tiene toda la pinta de utilizar Green para calcular el área. Algunas elecciones de $\vec{F}$ que comprueban $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1$ (y por tanto $\iint\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint_S dx\,dy \equiv A(S)$ def de área):

1) $F=(P,Q)=(0,x)$
2) $\vec{F}=(P,Q)=(-y,0)$
3) $F=(P,Q)=\frac{1}{2}(-y,x)$

$\Big\} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1$

En este caso como hay $\frac{1}{2}$ delante de la expresión que queremos llegar utilizaremos 3). Por Teo de Green sobre D (se puede aplicar ya que $\vec{F}$ en 3) es clase C^1):

$$\vec{F}=\frac{1}{2}(-y,x) \Rightarrow A(D)\equiv\iint_D dx\,dy = \oint_{\partial D}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Por lo que calculando I tenemos el resultado. Notamos que ∂D se compone de la unión de Γ y las rectas. Sea $\gamma_a = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = m_a x\}$ y $\gamma_b = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = m_b x\}$

$$\partial D = \Gamma \cup \gamma_a \cup \gamma_b$$

$$\Rightarrow I = \oint_{\partial D} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \underbrace{\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{l}}_{I_1} + \underbrace{\int_{\gamma_a} \vec{F}\cdot d\vec{l}}_{I_2} + \underbrace{\int_{\gamma_b} \vec{F}\cdot d\vec{l}}_{I_2}$$

$I_1 = \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{l} = \frac{1}{2}\int_\Gamma (-y,x)\Big|_{\vec{r}(\theta)} \cdot d\vec{l}$. $d\vec{l} = \vec{r}\,'(\theta)\,d\theta$ con $\vec{r}(t)$ parametrización que conocemos para Γ por enunciado:

$$\vec{r}(\theta) = \left(f(\theta)\cos(\theta), f(\theta)\sin(\theta)\right) \quad \theta\in[a,b]$$

- $\vec{r}\,'(\theta) = \left(f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\sin(\theta),\ f'(\theta)\sin(\theta) + f(\theta)\cos(\theta)\right)$
- $\vec{F}(\vec{r}(\theta)) = (-y,x)\Big|_{\vec{r}(\theta)} = \left(-f(\theta)\sin(\theta),\ f(\theta)\cos(\theta)\right)$

Por tanto:

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_a^b \begin{pmatrix} -f(\theta)\sin(\theta) \\ f(\theta)\cos(\theta)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\sin(\theta) \\ f'(\theta)\sin(\theta) + f(\theta)\cos(\theta)\end{pmatrix} d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b \left[\cancel{-f'f\sin(\theta)\cos(\theta)} + f^2\sin^2\theta + \cancel{ff'\cos\theta\sin\theta} + f^2\cos^2\theta\right] d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\,(\underbrace{\sin^2\theta + \cos^2\theta}_{=1})\,d\theta$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\int_a^b (f(\theta))^2\,d\theta}$$

Basta calcular I_2 e I_3. Recordamos que para una recta $y = mx$ su parametrización es $\vec{r}(t) = (t, mt)$ $t\in[t_i, t_f]$

- $\vec{r}\,'(t) = (1, m)$
- $\vec{F}(\vec{r}(t)) = (-y,x)\Big|_{\vec{r}(t)} = (-mt, t)$

$$I_2 = \int_{t_i}^{t_f} \begin{pmatrix} -m_a t \\ t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ m_a\end{pmatrix} dt = \int_{t_i}^{t_f} \cancel{-m_a t} + \cancel{m_a t} = \boxed{0}$$

Analogamente para I_3:

$$\boxed{I_3 = 0}$$

Reuniendo todo:

$$A(D) = I = I_1 + \cancelto{0}{I_2} + \cancelto{0}{I_3} = \frac{1}{2}\int_a^b (f(\theta))^2\,d\theta \quad //$$

P3 Piden calcular:

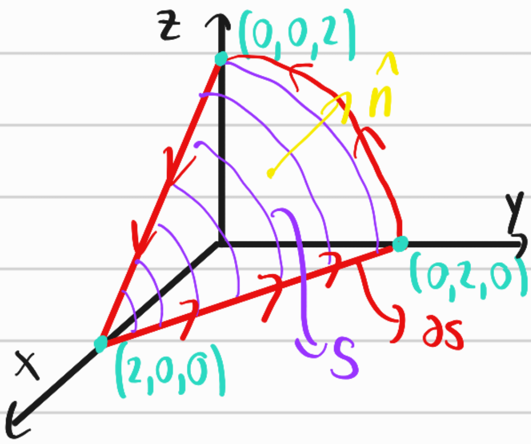
$$\iint_S \nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{A}$$

con $\vec{F}=(x-z)\hat{\imath}+(x^2+yz)\hat{\jmath}-3xyz\hat{k}$ y S superficie del cono $x=2-\sqrt{y^2+z^2}$ $(x,y,z\geq 0)$

Primero esbocemos la forma de S:

$$(x-2)^2=y^2+z^2$$

Recordamos ecc de cono invertido con eje z y punta en 0 $(x^2+y^2=z^2)$. Notamos que son parecidas pero en este caso el eje del cono es el eje x y la punta del cono se encuentra en $(2,0,0)$.



Calcular la integral de forma directa es engorroso y largo. Por ello aplicaremos Stokes (se puede aplicar ya $\vec{F}$ es clase C^1):

$$I=\iint_S \nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{A}=\iint_S \nabla\times\vec{F}\cdot\hat{n}\,dA \overset{\text{Stokes}}{=} \oint_{\partial S}\vec{F}\cdot d\vec{\ell}$$

Donde ∂S se orienta antihorario para seguir regla de la mano derecha con $\hat{n}$. Por lo tanto para calcular I solo hace falta calcular $\oint_{\partial S}\vec{F}\cdot d\vec{\ell}$.

∂S se compone de la unión de 3 curvas regulares

$$\Rightarrow \oint_{\partial S}\vec{F}\cdot d\vec{\ell}=\int_{\underset{\substack{\text{(recta en}\\ y=0)}}{\gamma_1}}\vec{F}\cdot d\vec{\ell}+\int_{\underset{\substack{\text{(recta en}\\ z=0)}}{\gamma_2}}\vec{F}\cdot d\vec{\ell}+\int_{\underset{\substack{\text{(circunf.}\\ \text{en } x=0)}}{\gamma_3}}\vec{F}\cdot d\vec{\ell}$$

Calculando por separado:

- $I_1=\int_{\gamma_1}\vec{F}\cdot d\vec{\ell}$ $\quad$ γ_1 recta que $(0,0,2)\to(2,0,0)$. Recordamos parametrización recta

$$\vec{r}_1(t)=P_f t+(1-t)P_i \quad t\in[0,1]$$
$$=(2t,0,0)+(0,0,2(1-t))$$
$$=(2t,0,2(1-t))$$

- $\vec{r}_1{}'(t)=(2,0,-2)$
- $\vec{F}(\vec{r}_1(t))=(x-z,x^2+yz,-3xyz)\Big|_{\vec{r}_1(t)}$

$$=(2t-2(1-t),4t^2,0)$$
$$=(4t-2,4t^2,0)$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^1 \begin{pmatrix} 4t-2 \\ 4t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 2(4t-2)\,dt$$
$$= \int_0^1 8t\,dt - \int_0^1 4\,dt$$
$$= \cancel{8}^{4} \frac{1}{\cancel{2}} - 4 = 0$$

• $I_2 = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot \vec{d\ell}$, γ_2 recta que une $(2,0,0) \to (0,2,0)$

$$\vec{r}_2(t) = (0,2t,0) + (2(1-t),0,0) \quad t \in [0,1]$$
$$= (2(1-t), 2t, 0)$$

• $\vec{r}_2\,'(t) = (-2,2,0)$

• $\vec{F}(\vec{r}_2(t)) = (x-z, x^2+yz, -3xyz)\big|_{\vec{r}_2(t)}$
$$= (2(1-t), 4(1-t)^2, 0)$$

$$\Rightarrow I_2 = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2-2t \\ 4(1-t)^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 [-4 + 4t + 8(1-t)^2]\,dt$$
$$= -4 + 4\int_0^1 t\,dt + 8\left[1 - 2\int_0^1 t\,dt + \int_0^1 t^2\,dt\right]$$
$$= -4 + \cancel{4}^{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} + 8\left[\cancel{1} - \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} + \frac{1}{3}\right]$$
$$= \frac{8}{3} - 2$$

• $I_3 = \int_{\gamma_3} \vec{F} \cdot \vec{d\ell}$ γ_3 $\overset{\text{arco de}}{\vee}$ circunferencia de radio 2 que une $(0,2,0) \to (0,0,2)$, $x=0$

$$\Rightarrow \vec{r}_3(t) = (0, 2\cos(t), 2\sin(t)) \quad t \in [0, \pi/2]$$

• $\vec{r}_3\,'(t) = (0, -2\sin(t), 2\cos(t))$

• $\vec{F}(\vec{r}_3(t)) = (x-z, x^2+yz, -3xyz)\big|_{\vec{r}_3(t)}$
$$= (-2\cos(t), -4\sin(t)\cos(t), 0)$$

$$\Rightarrow I_3 = \int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} -2\cos(t) \\ -4\sin(t)\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} -8\sin^2(t)\cos(t)\,dt = -8\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\cos(t)\,dt$$

CV $u = \sin(t)$
$du = \cos(t)\,dt$
$\sin(\pi/2) = 1$ lim sup
$\sin(0) = 0$ lim inf

$$= -8\int_0^1 u^2\,du = -\frac{8}{3}$$

Sumando todo

$$\Rightarrow \iint \nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{A} = I = I_1+I_2+I_3 = 0+\cancel{\tfrac{8}{3}}-2-\cancel{\tfrac{8}{3}}$$
$$= -2$$

P4

$$\vec{F} = \left(3x^2y-3z+e^x\sin z,\, x^2,\, e^x\cos z-3x\right)$$

a) Calcular $\nabla\times\vec{F}$

$$\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2y-3z+e^x\sin z & x^2 & e^x\cos z-3x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial}{\partial y}\left(e^x\cos z-3x\right)}^{0} - \cancel{\frac{\partial}{\partial z}(x^2)}^{0} \\ -\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x\cos z-3x\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(3x^2y-3z+e^x\sin z\right)\right] \\ \frac{\partial}{\partial x}(x^2)-\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y-3z+e^x\sin z\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \overset{0}{\cancel{-3}+e^x\cancel{\cos z}+e^x\cancel{\cos z}\cancel{+3}} \\ 2x-3x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2-3x^2 \end{pmatrix}$$

b) Γ curva parametrizada por:

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, \cos t) = \hat{\rho} + \cos t\,\hat{k} \quad t\in[0,2\pi]$$

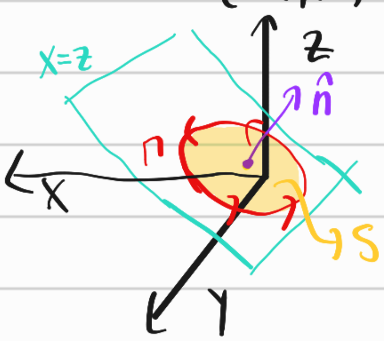
Calcular trabajo de $\vec{F}$ sobre $\Gamma \Rightarrow W = \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{l}$

Por definición es algo engorroso por la complejidad del campo $\vec{F}$. Para solventar este problema utilizaremos Stokes ($\vec{F}$ clase C^1 por álgebra y composición de fns clase C^1):

$$W = \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{l} = \iint_S \nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{A}$$

Analicemos Γ para identificar que superficie S encierra y parametrizarla de $\vec{r}(t)$ observamos que la componente x y z son iguales por lo que Γ vive en el plano $x=z$. Además se comprueba que $x^2+y^2=1$ $(\underset{x}{\cos^2 t}+\underset{y}{\sin^2 t}=1)$

Por lo tanto $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\leq 1 \wedge x=z\}$.



Parametrizamos S:

$$\vec{\sigma}(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho\cos\theta) \quad \rho\in[0,1]\ \theta\in[0,2\pi]$$

Necesitamos $d\vec{A} = \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\rho}\times\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\theta}\,d\rho\,d\theta$, por lo que calculamos $\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\rho}\times\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\theta}$:

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \rho} = (\cos\theta, \sin\theta, \cos\theta) \;\wedge\; \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \theta} = (-\rho\sin\theta, \rho\cos\theta, -\rho\sin\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & \cos\theta \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & -\rho\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\rho\sin^2\theta - \rho\cos^2\theta \\ 2\rho\sin\theta\cos\theta \\ \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho \\ \rho\sin(2\theta) \\ \rho \end{pmatrix} = \vec{n}$$

apunta hacia arriba en el eje z por lo que si es la normal que escogimos para el circuito Γ (antihorario por regla de la mano der.)

Reemplazando en la expresión dada por Stokes:

$$W = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x-3x^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{\vec{\sigma}(\rho,\theta)} \cdot \begin{pmatrix} -\rho \\ \rho\sin(2\theta) \\ \rho \end{pmatrix} d\rho\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (2x-3x^2)\Big|_{\vec{\sigma}} \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 2\rho^2\cos\theta\, d\rho\, d\theta - 3\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^3\cos^2\theta\, d\rho\, d\theta$$

$$= 2\underbrace{\cancel{\int_0^{2\pi}\cos(\theta)\,d\theta}}_{=0}\int_0^1 \rho^2\,d\rho - 3\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta}_{\pi}\underbrace{\int_0^1 \rho^3\,d\rho}_{\frac{1}{4}}$$

fn periodica integrada en periodo

$$= \boxed{-\frac{3}{4}\pi}$$