P1

Considerando el cambio de variables parabólico donde

$$x = uv\cos\theta$$
$$y = uv\sin\theta \quad , \text{ con } u,v \leq 0$$
$$z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \quad\quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Primero calculamos los factores escalares que se definen como:

$$h_u = \left\| \frac{\partial \vec{R}}{\partial u} \right\| , \; h_v = \left\| \frac{\partial \vec{R}}{\partial v} \right\| , \; h_\theta = \left\| \frac{\partial \vec{R}}{\partial \theta} \right\|$$

En este caso $\vec{R} = \left(uv\cos\theta, uv\sin\theta, \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \right)$, por lo tanto

$$h_u = \left\| \frac{\partial \vec{R}}{\partial u} \right\|$$
$$= \left\| \frac{\partial}{\partial u}\left(uv\cos\theta, uv\sin\theta, \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \right) \right\|$$
$$= \left\| (v\cos\theta, v\sin\theta, u) \right\|$$
$$= \sqrt{v^2\cos^2\theta + v^2\sin^2\theta + u^2}$$
$$= \boxed{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

$$h_v = \left\| \frac{\partial \vec{R}}{\partial v} \right\|$$
$$= \left\| (u\cos\theta, u\sin\theta, -v) \right\|$$
$$= \boxed{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

$$h_\theta = \left\| \frac{\partial \vec{R}}{\partial \theta} \right\|$$
$$= \left\| (-uv\sin\theta, uv\cos\theta, 0) \right\|$$
$$= \sqrt{(uv)^2\sin^2\theta + (uv)^2\cos^2\theta}$$
$$= \boxed{uv}$$

Para los vectores unitarios tenemos lo siguiente:

$$\hat{u} = \frac{\partial \vec{R}/\partial u}{h_u} , \; \hat{v} = \frac{\partial \vec{R}/\partial v}{h_v} , \; \hat{\theta} = \frac{\partial \vec{R}/\partial \theta}{h_\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} (v\cos\theta, v\sin\theta, u)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} (u\cos\theta, u\sin\theta, -v)}$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{uv}(-uv\sin\theta, uv\cos\theta, 0)$$

$$= \boxed{(-\sin\theta, \cos\theta, 0)}$$

Por último para comprobar que el sistema es ortonormal vemos si se cumple que $\hat{u}\cdot\hat{v} = \hat{u}\cdot\hat{\theta} = \hat{v}\cdot\hat{\theta} = 0$. En efecto

$$\hat{u}\cdot\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}(v\cos\theta, v\sin\theta, u)\cdot\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}(u\cos\theta, v\sin\theta, -v)$$

$$= \frac{1}{u^2+v^2}(uv\cos^2\theta + uv\sin^2\theta - uv)$$

$$= \frac{1}{u^2+v^2}(\cancel{uv}(\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{=1}) - \cancel{uv})$$

$$= 0$$

$$\hat{u}\cdot\hat{\theta} = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}(v\cos\theta, v\sin\theta, u)\cdot(-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}(\cancel{-v\cos\theta\sin\theta} + \cancel{v\cos\theta\sin\theta})$$

$$= 0$$

$$\hat{v}\cdot\hat{\theta} = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}(u\cos\theta, u\sin\theta, -v)\cdot(-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}(\cancel{-u\cos\theta\sin\theta} + \cancel{u\sin\theta\cos\theta})$$

$$= 0$$

$\Rightarrow \{\hat{u}, \hat{v}, \hat{\theta}\}$ triedro ortonormal

P2 Potencial de Yukawa

$$U(r) = -g^2 \frac{e^{-\alpha m r}}{r}$$

con g constante de escalamiento al igual que α, y m masa de la partícula

a) Encontraremos $\vec{F} = -\nabla \vec{U}$. (Tip $\nabla = \frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\hat{w}$). En esféricas $h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_\phi = r\sin\theta$. U sólo depende de $r \Rightarrow$ solo tiene componente en $\hat{r}$.

$$\vec{F} = -\nabla\vec{U} = g^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(r^{-1}e^{-\alpha m r}\right)\hat{r}$$

$$= g^2\left(-r^{-2}e^{-\alpha m r} - \alpha m r^{-1} e^{-\alpha m r}\right)\hat{r}$$

$$= -g^2\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\alpha m}{r}\right)e^{-\alpha m r}\hat{r}$$

b) Tomamos S casquete esférico de radio R centrado en O. El flujo portanto es:

$$\Phi = \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} \quad / d\vec{S} = \hat{n} h_\theta h_\phi \, d\phi \, d\theta = \hat{r} R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} -g^2\left(\frac{1}{R^2} + \frac{\alpha m}{R}\right)e^{-\alpha m r}\cancel{\hat{r}} \cdot R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \cancel{\hat{r}}$$

$$= -g^2\left(\frac{1}{R^2} + \frac{\alpha m}{R}\right)R^2 e^{-\alpha m r}\underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi}\sin\theta \, d\theta}_{\int d\Omega = 4\pi}$$

$$= -4\pi g^2 (1 + \alpha m R) e^{-\alpha m r}$$

c) Pdq $\nabla^2 U = \alpha^2 m^2 U$ para $r \neq 0$. Por def

$$\nabla^2 U = \nabla \cdot \nabla U$$
$$= -\nabla \cdot \vec{F}$$

Divergencia en coordenadas curvilíneas es $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u F h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v F_w)\right)$

En esféricas: $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}(F_r \, r^2 \sin\theta) + \cdots\right)$

$$\Rightarrow \nabla^2 U = -\nabla \cdot \vec{F}$$

$$= g^2 \frac{1}{r^2 \cancel{\sin\theta}} \frac{\partial}{\partial r}\left(\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\alpha m}{r}\right)e^{-\alpha m r} r^2 \cancel{\sin\theta}\right)$$

$$= g^2 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(e^{-\alpha m r} + \alpha m r \, e^{-\alpha m r}\right)$$

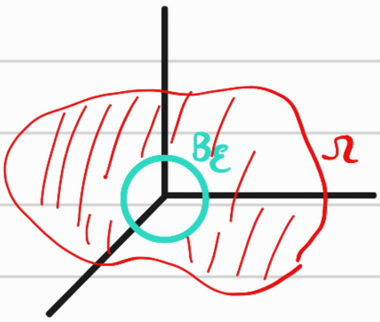
$$= g^2\frac{1}{r^2}\left(\cancel{-\alpha m e^{-\alpha m r}} + \cancel{\alpha m e^{-\alpha m r}} - \alpha^2 m^2 r e^{-\alpha m r}\right)$$

$$= \alpha^2 m^2 \cdot \underbrace{\left(-\frac{g^2}{r} e^{-\alpha m r}\right)}_{U}$$

$$\boxed{= \alpha^2 m^2 U} \quad r \neq 0, \text{ en } r=0 \text{ explota}$$

d) Pdq: $\underline{\iint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot d\vec{S} = -4\pi g^2 - \alpha^2 m^2 \iiint_{\Omega} U\, dV}$

El problema tiene toda la pinta de aplicar Teo de la div para $\vec{F}$ no obstante no es C^1 en todo el dominio (disc. en 0) por tanto no se puede aplicar. Para solventar este dilema definimos una esfera de radio ε y la región $\Omega \setminus B_\varepsilon$. En virtud del teo de la divergencia en esta región (donde $\vec{F}$ si es clase C^1)



$$\iint_{\partial(\Omega\setminus B_\varepsilon)} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega\setminus B_\varepsilon} \underbrace{\nabla\cdot\vec{F}}_{-\nabla^2 U}\, dV$$

$$\Rightarrow \iint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot d\vec{S} + \iint_{\partial B_\varepsilon} \vec{F}\cdot d\vec{S} = -\alpha^2 m^2 \iiint_{\Omega\setminus B_\varepsilon} U\, dV$$

por (c), ya que $r\neq 0$ en $\Omega\setminus B_\varepsilon$

$$\Rightarrow \iint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot d\vec{S} = -\iint_{\partial B_\varepsilon} \vec{F}\cdot d\vec{S} - \alpha^2 m^2 \iiint_{\Omega\setminus B_\varepsilon} U\, dV$$

$$= \underbrace{+\iint_{\partial B_\varepsilon} \vec{F}\cdot(+\hat{r})\, dS}_{\text{por } \partial\, r=\varepsilon} - \alpha^2 m^2 \iiint_{\Omega\setminus B_\varepsilon} U\, dV$$

$$= -4\pi g^2 (1 + \underbrace{\alpha m \varepsilon}_{\xrightarrow[\varepsilon\searrow 0]{} 0}) \underbrace{e^{-\alpha m \varepsilon}}_{\xrightarrow[\varepsilon\searrow 0]{} 1} - \alpha^2 m^2 \iiint_{\Omega\setminus B_\varepsilon} U\, dV$$

$$\boxed{= -4\pi g^2 - \alpha^2 m^2 \iiint U\, dV}$$

P3

a) $A \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto no vacío $\wedge$ $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ clase C^2.

$$\operatorname{div}(g\nabla g) = \operatorname{div}\left(g\left(\frac{\partial}{\partial x}g, \frac{\partial}{\partial y}g, \frac{\partial}{\partial z}g\right)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial}{\partial x}g\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(g\frac{\partial}{\partial y}g\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(g\frac{\partial}{\partial z}g\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}g\frac{\partial}{\partial x}g + g\frac{\partial^2}{\partial x^2}g + \left(\frac{\partial}{\partial y}g\right)^2 + g\frac{\partial^2}{\partial y^2}g + \left(\frac{\partial}{\partial z}g\right)^2 + g\frac{\partial^2}{\partial z^2}g$$

$$= g\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}g + \frac{\partial^2}{\partial y^2}g + \frac{\partial^2}{\partial z^2}g\right)}_{\Delta g} + \underbrace{\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}g\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}g\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}g\right)^2\right]}_{\|\nabla g\|^2}$$

$$= g\Delta g + \|\nabla g\|^2$$

b) $h(x,y,z)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Por álgebra y composición de fns clase $C^2 \in \mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\}$, h es clase C^2 (está compuesto por polinomios racionales que son clase C^∞ en $\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\}$ y raíces que también son C^2 en $\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\}$.

c) En coordenadas esféricas:

$$\vec{r}(r,\theta,\phi)=(\underset{\overset{\shortparallel}{x}}{r\sin\theta\cos\phi},\ \underset{\overset{\shortparallel}{y}}{r\sin\theta\sin\phi},\ \underset{\overset{\shortparallel}{z}}{r\cos\theta})$$

Por tanto $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ y $x=r\sin\theta\cos\phi$. Reemplazando:

$$h(r,\theta,\phi)=\frac{\cancel{r}\sin\theta\cos\phi}{\cancel{r}}=\sin\theta\cos\phi$$

Para calcular ∇h, utilizamos gradiente en esféricas:

$$\nabla h=\cancel{\frac{\partial}{\partial r}h}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}h\hat{\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}h\hat{\phi}$$

$$=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cos\phi)\hat{\theta}+\frac{1}{r\cancel{\sin\theta}}\frac{\partial}{\partial\phi}(\cancel{\sin\theta}\cos\phi)\hat{\phi}$$

$$\boxed{=\frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\hat{\theta}-\frac{\sin\phi}{r}\hat{\phi}}$$

d) Como h es C^1 en $\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\}$; se tiene que $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\}$

$$\frac{\partial h}{\partial\hat{r}}=\nabla h\cdot\hat{r}$$

$$=\left(-\frac{\sin\phi}{r}\hat{\phi}+\frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\hat{\theta}\right)\cdot\hat{r}$$

$$\boxed{=0}$$

$\hat{r}\cdot\hat{\theta}=0 \wedge \hat{r}\cdot\hat{\phi}=0$ esféricas sistema ortonormal

e) $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 1\leq x^2+y^2+z^2\leq 4\}$. Calcular $\iiint_\Omega h\Delta h\,dV$.

Por (a), se tiene que $\operatorname{div}(g\nabla g)=g\Delta g+\|\nabla g\|^2$ en $A\subseteq\mathbb{R}^3$ abierto. Como $h:\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\}\to\mathbb{R}$ campo escalar C^2 en $\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\}$ abierto es posible aplicar la igualdad:

$$\iiint_\Omega h\Delta h\,dV=\iiint_\Omega[\operatorname{div}(h\nabla h)-\|\nabla h\|^2]\,dV$$

$$=\underbrace{\iiint_\Omega\operatorname{div}(h\nabla h)\,dV}_{I_1}-\underbrace{\iiint_\Omega\|\nabla h\|^2\,dV}_{I_2}\quad(*)$$

Calculemos I_1 primero. Como $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ abierto cuya frontera $\partial\Omega=S_1\cup S_2$ es regular y orientable (S_1 cascarón esférico radio 1 y S_2 " " radio 2) y $(h\nabla h)$ campo clase C^2 en $\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\}$; en virtud del teo de la divergencia:

$$I_1 = \iiint_\Omega \operatorname{div}(h\nabla h)\, dV = \iint_{\partial\Omega} h\nabla h \cdot \hat{n}\, dA$$

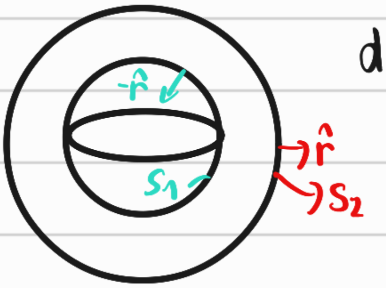
$$= \iint_{S_1} h\nabla h\, \hat{n}_1\, dA + \iint_{S_2} h\nabla h \cdot \hat{n}_2\, dA$$

Se tiene que:

$$h\nabla h = \cos\phi \sin\theta \left(-\frac{\sin\phi}{r}\hat{\phi} + \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\hat{\theta} \right)$$

$$\hat{n}_1 = -\hat{r} \quad \wedge \quad \hat{n}_2 = \hat{r}$$

$$dA = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$



$$I_1 = \iint_{S_1} -h\,\underbrace{(\nabla h \cdot \hat{r})}_{=0}\, dA + \iint_{S_2} h\,\underbrace{(\nabla h \cdot \hat{r})}_{=0}\, dA$$

por parte (c)

$$= \boxed{0}$$

Calculemos I_2:

$$\iiint_\Omega \|\nabla h\|^2 = \iiint_\Omega \left\| -\frac{\sin\phi}{r}\hat{\phi} + \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\hat{\theta} \right\|^2 dV \quad / dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= \iiint \left(\frac{\sin^2\phi}{\cancel{r^2}} + \frac{\cos^2\theta\cos^2\phi}{\cancel{r^2}} \right) \cancel{r^2} \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^2 (\sin^2\phi \sin\theta + \cos^2\theta \sin\theta \cos^2\phi)\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2\phi\, d\phi}_{\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta}_{2} \underbrace{\int_1^2 dr}_{1} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2\phi}_{\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta \cos^2\theta\, d\theta}_{I} \underbrace{\int_1^2 dr}_{1}$$

Desarrollemos I por separado. Sea $u = \cos\theta \Rightarrow du = -\sin\theta\, d\theta$

$\cos(\pi) = -1$ lim sup

$\cos(0) = 1$ lim inf

$$I = -\int_1^{-1} u^2\, du$$

$$= \int_{-1}^{1} u^2\, du$$

$$= \left.\frac{u^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

Reemplazando:

$$I_2 = 2\pi + \frac{2}{3}\pi = \boxed{\frac{8\pi}{3}}$$

Volviendo a la igualdad inicial:

$$\iiint_\Omega h\Delta h\, dV = \underbrace{\cancel{I_1}}_{0} - I_2$$

$$= \boxed{-\frac{8\pi}{3}}$$