P_1

Calcular

$$W=\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} \quad / \text{ Trabajo Fuerza } \vec{F} \text{ sobre } \Gamma$$

Γ: hélice con parametrización: $\vec{\gamma}(t)=(\cos t,\sin t,t)$, $t\in[0,2\pi]$

Por definición de integral de línea

$$W=\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^{2\pi}\vec{F}(\vec{\gamma}(t))\cdot\vec{\gamma}'(t)\,dt$$

$$\vec{F}(\gamma(t))=\left.\frac{(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2}\right|_{\vec{\gamma}(t)} \quad / \begin{array}{l} x=\cos t\\ y=\sin t\\ z=t\end{array}$$

$$=\frac{(\cos t,\sin t,t)}{\underset{1}{\cancel{\cos^2 t+\sin^2 t}}+t^2}$$

$$=\frac{(\cos t,\sin t,t)}{1+t^2}$$

$$\vec{\gamma}'(t)=(-\sin t,\cos t,1)$$

$$\Rightarrow W=\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+t^2}(\cos t,\sin t,t)\cdot(-\sin t,\cos t,1)\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+t^2}\left(\cancel{-\cos t\sin t}+\cancel{\sin t\cos t}+t\right)dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{t}{1+t^2}\,dt \qquad \text{CV} \quad \begin{array}{l} u=1+t^2\\ du=2t\,dt\end{array} \quad \begin{array}{l} t=2\pi\Rightarrow u=1+4\pi^2\\ t=0\Rightarrow u=1\end{array}$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^{1+4\pi^2}\frac{1}{u}\,du$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln(1+4\pi^2)-\cancel{\ln(1)}\right]$$

$$=\boxed{\frac{1}{2}\ln(1+4\pi^2)}$$

Nota: También se pudo haber hecho intuyendo que $\vec{F}=\nabla f$ donde $f(x,y,z)=\ln\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\Rightarrow W=f(P_f)-f(P_i)$

P2

a) f clase C^2 tq $\partial x^2 f + \partial y^2 f = 0$ sobre disco radio $r>0$.

Pdq | $f(0,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta$.

- Primero: Γ_r circunf. radio $r>0$, se define:

$$\varphi(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta \xrightarrow{r\frac{d}{dr}}$$

$$\left.\begin{aligned} r\varphi'(r) &= \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dr}\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, \sin\theta)\, r\,d\theta \\ &= \frac{}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial f}{\partial r}\Big(\boxed{\overset{= x}{r\cos\theta}}, \boxed{\overset{= y}{r\sin\theta}}\Big)\, r\,d\theta \end{aligned}\right\} \text{Leibniz}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right) r\,d\theta \qquad \boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\right) r\,d\theta$$

$$\vec{r}'(\theta) = (\underset{dx}{\underset{\parallel}{-r\sin\theta}}, \underset{dy}{\underset{\parallel}{r\cos(\theta)}})$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\right)\underbrace{(-r\sin\theta\,d\theta)}_{dx} + \frac{\partial f}{\partial x}\underbrace{r\cos\theta\,d\theta}_{dy}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx + \frac{\partial f}{\partial x}dy$$

$$r\varphi'(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_r}\underset{\vec{F}}{\underset{\parallel}{\left(-\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}\right)}}\cdot d\vec{r}$$

Demostrando lo pedido

- Segundo: Ocupando Green en $r\varphi'(r)$ (se puede aplicar ya que f es clase $C^2(\mathbb{R})$)

$$\underbrace{r\varphi'(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_r}\Big(\overset{P}{\overset{\parallel}{-\frac{\partial f}{\partial y}}}, \overset{Q}{\overset{\parallel}{\frac{\partial f}{\partial x}}}\Big)\cdot d\vec{r}}_{} \Longleftarrow \text{Green}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\iint_{D_r}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Big(\underset{Q}{\underset{\parallel}{\frac{\partial f}{\partial x}}}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\underset{P}{\underset{\parallel}{-\frac{\partial f}{\partial y}}}\Big)\right)dxdy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\iint_{D_r} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)}_{=0 \text{ por enunciado}} dxdy$$

$$\Rightarrow \varphi'(r) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(r) = cte \equiv K$$

Tomando limite $r \to 0^+$

$$\underset{\substack{\| \\ K}}{\lim_{r\to 0^+} \varphi(r)} = \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \boxed{f(0,0)}\,d\theta \quad \to \text{cte para la integral en } \theta\text{, sale}$$

$$\varphi(r) = K = f(0,0)\,\frac{1}{\cancel{2\pi}}\,\cancel{2\pi}$$

$$\therefore f(0,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta$$

P3

$\Gamma : x^2+y^2+z^2=4 \cap z=\sqrt{3}\,y$ recorrida antihorario.

Calcular

$$\int_\Gamma (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$$

$\downarrow$ notaciones equivalentes

$$= \int_\Gamma (y-z, z-x, x-y)\cdot d\vec{r}$$

Usando Stokes (campo clase C^1 en dominio por álgebra y composición de fns clase C^1)

$$I = \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S}$$

S superficie encerrada por Γ. Calculando $\nabla \times \vec{F}$:

$$\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1-1 \\ -1-1 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Parametricemos S:

$$\underset{①}{x^2+y^2+z=4} \wedge \underset{②}{z=\sqrt{3}y}$$

de ② en ①: $x^2+y^2+3y^2=4$

$$\Rightarrow x^2+4y^2=4$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{x^2}{2^2}+y^2}_{\text{elipse de semiejes } a=2 \text{ y } b=1}=1 \qquad \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}(\rho,\theta)=\left(\underset{\overset{\parallel}{a}}{2}\overset{\parallel x}{\rho\cos\theta},\ \overset{\parallel y}{\rho\sin\theta},\ \overset{\parallel \sqrt{3}y}{\sqrt{3}\rho\sin\theta}\right) \qquad \boxed{\begin{array}{l}\theta\in[0,2\pi]\\ \rho\in[0,1]\end{array}}$$

Recordando que $d\vec{S}=\boxed{\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\rho}\times\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\theta}}\,d\rho\, d\theta$:

$$\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\rho}=(2\cos\theta,\sin\theta,\sqrt{3}\sin\theta)$$

$$\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\theta}=(-2\rho\sin\theta,\ \rho\cos\theta,\sqrt{3}\rho\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\rho}\times\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\theta}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2\cos\theta & \sin\theta & \sqrt{3}\sin\theta\\ -2\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & \sqrt{3}\rho\cos\theta\end{vmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cancel{\sqrt{3}\rho\sin\theta\cos\theta}-\cancel{\sqrt{3}\rho\sin\theta\cos\theta}\\ -(2\sqrt{3}\rho\cos^2\theta+2\sqrt{3}\rho\sin^2\theta\\ 2\rho\cos^2\theta+2\rho\sin^2\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0\\ -2\sqrt{3}\rho\\ 2\rho\end{pmatrix}$$

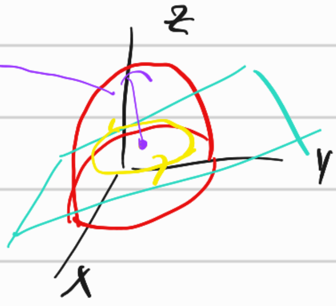
Para corroborar que es la normal que sigue regla de la mano derecha vemos dibujo:

normal

apunta para arriba en $\hat{z}$

$$\Rightarrow \vec{n}=\begin{pmatrix}0\\ -2\sqrt{3}\rho\\ 2\rho\end{pmatrix} \text{ sirve}$$

$\overset{\vee}{0}$



$$\Rightarrow \int_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^{2\pi}\int_0^1\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\sqrt{3}\rho\\2\rho\end{pmatrix}d\rho\, d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1(4\sqrt{3}-4)\rho\, d\rho\, d\theta$$

$$=4(\sqrt{3}-1)\underbrace{\int_0^{2\pi}d\theta}_{2\pi}\underbrace{\int_0^1\rho\, d\rho}_{\frac{1}{\cancel{2}}}$$

$$=\underline{4\pi(\sqrt{3}-1)}$$

P4 $\phi(r) = \frac{k}{r}$ definido para $r>0$

a) Indicación: Ocupar Laplaciano en esféricas

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \dots$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow \nabla^2\phi = 0 \quad \forall r>0$$

Alternativa: Calcular en cartesianos donde se comprueba que:

$$\nabla^2\phi = \nabla\cdot(\nabla\phi)$$

$$= \nabla\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}V(r), \frac{\partial}{\partial y}V(r), \frac{\partial}{\partial z}V(r)\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{K}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{K}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{K}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow \nabla^2\phi = 0 \quad \forall r>0$$

b) Ocupar Gauss:

$\cancel{r}^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$

angulo sólido

$\parallel$

$$\iiint_{B(0,\varepsilon)} \nabla^2\phi\, d\tau = \underbrace{\iint_{\partial B(0,\varepsilon)} \nabla\phi\cdot\hat{r}\, d\Omega}_{=-4\pi K}$$

$$\nabla\phi = \partial_r\phi\,\hat{r} + \dots = -\frac{K}{\cancel{r^2}}\hat{r}$$

c) Parecen una contradicción los resultados anteriores ya que $\nabla^2\phi = 0$ debiese implicar que $\iiint_{B(0,\varepsilon)} \nabla^2\phi\, d\tau = 0$. No obstante hay una trampa ya que la aplicación del teo de Gauss/divergencia no fue correcta. El teo tiene como hipotesis que el campo sea clase C^1 sobre el dominio de integración. En este caso el campo es $\nabla\phi = -\frac{k}{r^2}\hat{r}$, que claramente tiene una discontinuidad en $r=0$ punto $\in$ a $B(0,\varepsilon)$.

Para conciliar ambos resultados consideremos la igualdad del item b):

$$\iiint \underset{\substack{\| \\ 0\ \forall r>0 \\ ?\ r=0}}{\boxed{\nabla^2\phi}}\, d\tau = cte$$

Para resolver este problema los físicos y matemáticos idearon la función delta de Dirac, la cual cumple para cualquier función f:

$$\int f(x)\,\delta(x-a)\,dx = f(a)$$

Otra def informal de la delta es la sgte:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \quad \wedge \quad \int \delta(x)\,dx = 1$$

Aplicado al problema, si $\nabla^2\phi = -4\pi k\,\delta(\vec{r})$ tenemos la solución pues:

$$\iiint_{B(0,\varepsilon)} \nabla^2\phi\, d\tau = \iiint_{B(0,\varepsilon)} -4\pi k\,\delta(\vec{r})\, d\tau$$

$$= -4\pi k \underset{\substack{\| \\ 1}}{\boxed{\iiint_{B(0,\varepsilon)} \delta(\vec{r})\, d\tau}}$$

$\Rightarrow$ $\nabla^2\phi = -4\pi k\,\delta(\vec{r})$ cumple ambas condiciones

Extra: Este es el origen de la famosa ley de Gauss de electromagnetismo, donde $k = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}$ y $\vec{E} = -\nabla\phi$

$$-4\pi k = \iiint \nabla^2\phi\, d\tau = \iint \underset{\substack{\| \\ -\vec{E}}}{\boxed{\nabla\phi}} \cdot d\vec{s}$$

$$= -\iint \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow \iint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \cancel{4\pi}\,\frac{q}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0}$$

$$= \frac{q}{\varepsilon_0}$$