Auxiliar 2

Integral de línea, flujo y teoremas fundamentales

Profesor: Ricardo Carlos Freire
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Calcular el trabajo realizado al mover un objeto sobre la hélice parametrizada por $\gamma(t) := (\cos(t), \sin(t), t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ sometido a la fuerza

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{x^2 + y^2 + z^2} \quad , \text{donde } (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$$

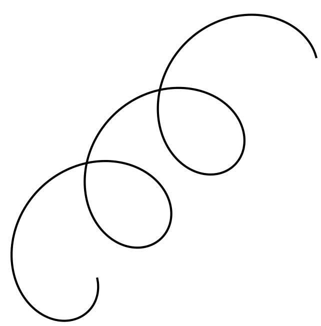

Figura 1: Hélice parametrizada por $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$.

Pregunta 2

Sea f una función de la clase $C^2(\mathbb{R}^2)$ tal que $\nabla^2 f = 0$ sobre el disco centrado en el origen de radio $r > 0$. Demuestre que $f(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\, d\theta$ mediante los siguientes pasos:

1. Primero: Considere Γ_r la circunferencia de radio $r > 0$ centrada en el origen y definiendo $\varphi(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, d\theta$. Verifique que $r\varphi'(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$, donde $\mathbf{F} = \left(-\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$.
2. Segundo: Use lo obtenido en el paso anterior para asegurar que φ es constante, y estudie $\lim_{r \to 0^+} \varphi(r)$ para concluir el resultado.

Pregunta 3

Sea Γ la curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con el plano $z = \sqrt{3}y$, recorrida de tal modo que observando el plano xy desde el eje z positivo, el sentido aparezca contrario al de las agujas del reloj. Calcule

$$\int_\Gamma (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$$

(**Indicación:** Recuerde que el área de la región encerrada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es πab.)

Pregunta 4

Considere el potencial de Coulomb $\phi(r) = \frac{k}{r}$ en coordenadas polares ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) con k constante.

a) Calcule explícitamente, usando operadores diferenciales en coordenadas esféricas el valor de $\nabla^2\phi$ para $r > 0$. **Hint:** El laplaciano en coordenadas polares toma la siguiente forma:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

b) Usando el Teorema de Gauss calcule

$$\int_{B(0,\epsilon)} \nabla^2\phi \, d\tau$$

donde $B(0,\epsilon)$ es la bola de radio ϵ centrada en el origen.

c) Utilizando los 2 resultados anteriores especule la forma de la función $\nabla^2\phi \ \forall\vec{r}$.

Resumen

Integral de línea: La integral de línea de una función $\mathbf{F} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sobre Γ, parametrizada por la función $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ se calcula como

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \, d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(\tau)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \, d\tau$$

Propiedad: $\mathbf{F} = -\nabla g \quad \Rightarrow \quad \oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$

Integral de flujo: La integral de flujo de una función $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sobre S, parametrizada por la función $\mathbf{r} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ se representa por

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \iint_U \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) (u, v) \, du \, dv$$

donde $dS = \left\| \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \right\| du \, dv$.

Teorema de Stokes: Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular por trozos cuyo borde $\Gamma = \partial S$ es una curva cerrada, simple y regular por trozos. Sea $\mathbf{F} : \Lambda \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathbb{C}^1$ tal que $\Lambda \supseteq S \cup \partial S$ con Λ abierto, entonces

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} \tag{1}$$

donde Γ se recorre en sentido antihorario con respecto a $\hat{\mathbf{n}}$ (se satisface regla de la mano derecha).

Teorema de Green (Stokes 2D): Aplicando el Teorema de Stokes para $S \subseteq \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{F} : \Lambda \to \mathbb{R}^2$ dado por $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ entonces

$$\oint_{\partial S} P dx + Q dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Teorema de la divergencia (o Gauss): Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto acotado cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por trozos orientada según la normal exterior. Sea $\mathbf{F} : \Omega_0 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 tal que $\Omega_0 \supseteq \Omega = \Omega \cup \partial\Omega$, entonces

$$\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F} dV \tag{2}$$

Análogamente a Stokes, en 2D el teorema de la divergencia toma la siguiente forma:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \iint_S \nabla \cdot \mathbf{F} \, dS$$

lo cual para $\mathbf{F} = (P, Q)$

$$\oint_{\partial S} P dx - Q dty = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

(prácticamente igual a Green).