P1)

a) Sea $\rho = f(\theta) \Rightarrow \vec{r}(\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = (f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta)$

Pdq)

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2}\, d\theta$$

Utilizando def de longitud de curva:

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left\| \frac{d\vec{r}(\theta)}{d\theta} \right\| d\theta$$

pasa a derivar cada componente

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left\| \frac{d}{d\theta}\left(f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta\right) \right\| d\theta$$

asumimos $f(\theta) = f$ para ahorrar notación

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left\| \left(f'\cos\theta - f\sin\theta, f'\sin\theta + f\cos\theta\right) \right\| d\theta$$

$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(f'\cos\theta - f\sin\theta)^2 + (f'\sin\theta + f\cos\theta)^2}\, d\theta$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(f'^2\cos^2\theta \cancel{- 2f'f\cos\theta\sin\theta} + f^2\sin^2\theta + f'^2\sin^2\theta \cancel{+ 2f'f\cos\theta\sin\theta} + f^2\cos^2\theta \right)^{1/2} d\theta$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f^2\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{=1} + f'^2\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{=1}}\, d\theta$$

$$= \boxed{\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f^2 + f'^2}\, d\theta}$$ demostrando lo pedido

b) Pdq) Si $f'(\theta) = a f(\theta)$ con $a \in \mathbb{R}$, entonces la curvatura de Γ en cualquier θ es

$$K(\theta) = \frac{1}{\sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2}}$$

Partimos de la definición de curvatura:

$$K = \frac{\| d\vec{T}/d\theta \|}{\| d\vec{r}/d\theta \|}$$

Vemos que hay que derivar c/r a θ $\vec{T}$ vector tangente, el cual se define como:

$$\vec{T}(\theta) = \frac{\vec{r}\,'(\theta)}{\|\vec{r}\,'(\theta)\|}$$

Como estamos en coordenadas polares y $\rho = f(\theta)$, entonces

$$\vec{r}(\theta) = (f\cos\theta,\ f\sin\theta)$$

$\frac{d}{d\theta}$

$$\vec{r}\,'(\theta) = (f'\cos\theta - f\sin\theta,\ f'\sin\theta + f\cos\theta)$$

$\|\cdot\|$ pasos en item anterior

$$\|\vec{r}\,'(\theta)\| = \sqrt{f'^2 + f^2}$$

$$= \sqrt{a^2f^2 + f^2}$$

$f' = af$ por enunciado

$$= f\sqrt{a^2+1}$$

Por lo tanto:

$$\vec{T}(\theta) = \frac{\vec{r}\,'(\theta)}{\|\vec{r}\,'(\theta)\|}$$

$$\vec{T}(\theta) = \frac{\cancel{f}(a\cos\theta - \sin\theta,\ a\sin\theta + \cos\theta)}{\cancel{f}\sqrt{a^2+1}}$$

$\frac{d}{d\theta}$

$$\vec{T}\,'(\theta) = \frac{(-a\sin\theta - \cos\theta,\ a\cos\theta - \sin\theta)}{\sqrt{a^2+1}}$$

$\|\cdot\|$

$$\|T'(\theta)\| = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\sqrt{\begin{matrix} a^2\sin^2\theta + 2a\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta \\ + a^2\cos^2\theta - 2a\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta \end{matrix}}$$

$$= 1$$

Y por lo tanto:

$$K = \frac{\|\vec{T}\,'(\theta)\|}{\|\vec{r}\,'(\theta)\|}$$

$\|\vec{T}\,'(\theta)\| = 1$, $\|\vec{r}\,'(\theta)\| = f\sqrt{a^2+1}$

$$= \frac{1}{f(\theta)\sqrt{1+a^2}}$$

P_2 $\vec{F}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $f, g: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, campos suaves

a) Pdq $\boxed{\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g}$

Partiendo del lado izq (LHS):

$$\nabla(fg) = \partial_x(fg)\hat{\imath} + \partial_y(fg)\hat{\jmath} + \partial_z(fg)\hat{k}$$

regla de leibniz o del producto

$$= g\partial_x f\hat{\imath} + f\partial_x g\hat{\imath} + g\partial_y f\hat{\jmath} + f\partial_y g\hat{\jmath} + g\partial_z f\hat{k} + f\partial_z g\hat{k}$$

$$= \underbrace{f(\partial_x g\hat{\imath} + \partial_y g\hat{\jmath} + \partial_z g\hat{k})}_{= \nabla g} + \underbrace{g(\partial_x f\hat{\imath} + \partial_y f\hat{\jmath} + \partial_z f\hat{k})}_{= \nabla f}$$

$$= f\nabla g + g\nabla f$$

b) Pdq $\boxed{\nabla\cdot(f\vec{F}) = f\nabla\cdot\vec{F} + \nabla f\cdot\vec{F}}$

Asumiendo $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$, partiendo de LHS:

$$\nabla\cdot(f\vec{F}) = \partial_x(fF_x) + \partial_y(fF_y) + \partial_z(fF_z)$$

$$= F_x\partial_x f + f\partial_x F_x + F_y\partial_y f + f\partial_y F_y + F_z\partial_z f + f\partial_z F_z$$

$$= f\underbrace{(\partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z)}_{\nabla\cdot\vec{F}} + \underbrace{F_x\partial_x f + F_y\partial_y f + F_z\partial_z f}_{\vec{F}\cdot\nabla f}$$

$$= f\nabla\cdot\vec{F} + \vec{F}\cdot\nabla f$$

c) Pdq $\boxed{\nabla\times(f\vec{F}) = f\nabla\times\vec{F} + \nabla f\times\vec{F}}$

$$\nabla\times(f\vec{F}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ fF_x & fF_y & fF_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_y(fF_z) - \partial_z(fF_y) \\ -[\partial_x(fF_z) - \partial_z(fF_x)] \\ \partial_x(fF_y) - \partial_y(fF_x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_z\partial_y f + f\partial_y F_z - F_y\partial_z f - f\partial_z F_y \\ -[F_z\partial_x f + f\partial_x F_z - F_x\partial_z f - f\partial_z F_x] \\ F_y\partial_x f + f\partial_x F_y - F_x\partial_y f - f\partial_y F_x \end{pmatrix}$$

$$= f\begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ -[\partial_x F_z - \partial_z F_x] \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_z\partial_y f - F_y\partial_z f \\ -[F_z\partial_x f - F_x\partial_z f] \\ F_y\partial_x f - F_x\partial_y f \end{pmatrix}$$

$$= f\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ \partial_x f & \partial_y f & \partial_z f \end{vmatrix}$$

$= \nabla f$

$$= f\,\nabla \times \vec{F} + \vec{F} \times \nabla f$$

d) Pdq $\boxed{\nabla^2(fg) = g\nabla^2 f + f\nabla^2 g + 2\nabla f\cdot\nabla g}$

$$\nabla^2(fg) = \nabla\cdot(\nabla(fg))$$

item a)

$$= \nabla\cdot(g\nabla f + f\nabla g)$$

$\nabla\cdot()$ op lineal

$$= \nabla\cdot(g\nabla f) + \nabla\cdot(f\nabla g)$$

$$= \partial_x(g\partial_x f) + \partial_y(g\partial_y f) + \partial_z(g\partial_z f) + \partial_x(f\partial_x g) + \partial_y(f\partial_y g) + \partial_z(f\partial_z g)$$

$$= \partial_x g\,\partial_x f + g\partial_x^2 f + \partial_y\partial_y f + g\partial_y^2 f + \partial_z g\,\partial_z f + g\partial_z^2 f + \partial_x f\,\partial_x g + f\partial_x^2 g + \partial_y f\,\partial_y g + f\partial_y^2 g + \partial_z f\,\partial_z g + f\partial_z^2 g$$

$$= g\nabla^2 f + f\nabla^2 g + \nabla g\cdot\nabla f$$

e) Pdq $\boxed{\nabla\times(\nabla f) = 0}$

$$\nabla\times(\nabla f) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \partial_x f & \partial_y f & \partial_z f \end{vmatrix}$$

Teo de Clairaut - Scharwz (f camp suave):
$\partial_{xz} = \partial_{zx}$
$\partial_{yz} = \partial_{zy}$
$\partial_{xy} = \partial_{yx}$

$$= \begin{pmatrix} \partial_{yz} f - \partial_{zy} f \\ -\partial_{xz} f + \partial_{zx} f \\ \partial_{xy} f - \partial_{yx} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

f) $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{F})=0$

$$\nabla\times\vec{F}=\left(\partial_y F_z-\partial_z F_y,\ -\partial_x F_z+\partial_z F_x,\ \partial_x F_y-\partial_y F_x\right)$$

$\nabla\cdot(\,)$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\nabla\times\vec{F}) &= \partial_x(\partial_y F_z-\partial_z F_y)+\partial_y(-\partial_x F_z+\partial_z F_x)+\partial_z(\partial_x F_y-\partial_y F_x)\\ &= \cancel{\partial_{xy}F_z}-\cancel{\partial_{xz}F_y}-\cancel{\partial_{yx}F_z}+\cancel{\partial_{yz}F_x}+\cancel{\partial_{zx}F_y}-\cancel{\partial_{zy}F_x}\\ &= 0\end{aligned}$$

P4

Sea $\vec{F}=-z\,\hat{i}+y\,\hat{j}+x\,\hat{k}$

- ¿Existe campo escalar f suave tq $\nabla f=\vec{F}$?

Por (e) de la P_2 se sabe que $\nabla\times(\nabla f)=0$. Supongamos que $\vec{F}=\nabla f$. Aplicando rotor

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ -z & y & x\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}\cancel{\partial_y(x)}^{0}-\cancel{\partial_z(y)}^{0}\\ -[\partial_x(x)-\partial_z(-z)]\\ \cancel{\partial_x(y)}_{0}+\cancel{\partial_y(-z)}_{0}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0\\-(1+1)\\0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\times$ contradicción

$\Rightarrow \vec{F}$ no se puede escribir como ∇f

- ¿Existe campo vectorial $\vec{G}$ tal que $\nabla\times\vec{G}=\vec{F}$?

Nuevamente sospechamos que no (por el tipo de pregunta). Por lo tanto si suponemos que $\nabla\times\vec{G}=\vec{F}$, aplicando divergencia: por (f)

$$\begin{aligned}(0=)\ \nabla\cdot(\nabla\times\vec{G}) &= \nabla\cdot\vec{F}\\ &= \cancel{\partial_x(-z)}^{0}+\cancel{\partial_y(y)}^{1}+\cancel{\partial_z(x)}^{0}\\ &= 1\neq 0\end{aligned}$$

$\times$ contradicción

$\Rightarrow \vec{F}$ no se puede escribir como $\nabla \times \vec{G}$

P3

$$I=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_{\vec{r}(t)}\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt$$

$\vec{r}(t)$ es la circunferencia de radio 2 que tiene como parametrización:

$$\vec{r}(t)=(2\cos t, 2\sin t) \quad t\in[0,2\pi]$$
$$\vec{r}\,'(t)=(-2\sin t, 2\cos t) \quad r=2$$

Para evaluar el campo $\left(-\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ en $\vec{r}(t)$ lo trabajamos un poco algebraicamente con $f(x,y)=g(\sqrt{x^2+y^2})=g(r)$ (ya que $r=\sqrt{x^2+y^2}$):

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\left(-\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\right) \quad \text{/regla de la cadena}$$

$$=\left(-\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2},\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{x^2+y^2})\right)$$

$$=\frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}=r},\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}=r}\right)$$

$f=g(r)\Rightarrow \frac{\partial g(r)}{\partial r}=g'(r)$. Evaluando en $\vec{r}(t)$ ($x=2\cos t$ $y=2\sin t$ $r=2$)

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_{\vec{r}(t)}=g'(2)\left(\frac{-\cancel{2}\sin t}{\cancel{2}},\frac{\cancel{2}\cos t}{\cancel{2}}\right)$$

$$= \overset{*}{1}\,(-\sin t, \cos t) \qquad * \text{ por enunciado}$$

Por lo tanto:

$$I=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_{\vec{r}(t)}\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(-\sin t,\cos t)\cdot(-2\sin t, 2\cos t)\,dt$$

$$=2\int_0^{2\pi}\underbrace{(\sin^2 t+\cos^2 t)}_{1}\,dt$$

$$=\boxed{4\pi}$$

P5

C curva suave en un plano parametrizada por $\vec{r}(s)$, donde s es el parametro longitud de curva $\left(s(t)=\int_a^t \|\vec{r}'(\tau)\| d\tau\right)$

La curvatura κ en s se define como:

$$\kappa = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\| = \|\vec{T}'(s)\|$$

a) Pdq

$$\kappa = \frac{\|\vec{T}'(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|}$$

Como dice el enunciado, utilizaremos regla de la cadena partiendo de la definición en fn de s:

$$\kappa = \left\| \frac{d\vec{T}(s)}{ds} \right\|$$

Ahora bien, un resultado importante a utilizar es el sgte:

$$s(t) = \int_a^t \|\vec{r}'(\tau)\| d\tau$$

$$\frac{d}{dt} \downarrow \quad \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\int_a^t \|\vec{r}'(\tau)\| d\tau$$

Teo fundamental del cálculo (TFC)

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = \|\vec{r}'(t)\|$$

Por lo tanto aplicando regla de la cadena:

$$\kappa = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\| = \frac{d\vec{T}}{dt}\frac{dt}{ds}$$

$$= \left\| \frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\| \rightarrow \|\vec{r}'(t)\|$$

$$= \frac{\|\vec{T}'(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|}$$

b) Pdq

$$K=\frac{\|\vec{T}'(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|} \iff K=\frac{\|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3}$$

Para demostrar esto partiremos de la definición de vector tangente $\vec{T}(t)$, intentando expresar el corcho a demostrar en fn de s:

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}(t)\|}$$

$$\Rightarrow \vec{r}'(t)=\underbrace{\|\vec{r}(t)\|}_{\frac{ds}{dt}}\vec{T}(t)$$

$$\overset{\frac{d}{dt}}{\Longrightarrow} \vec{r}''(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\vec{T}(t)\right)$$

$$=\frac{d^2s}{dt^2}\vec{T}(t)+\frac{ds}{dt}\vec{T}'(t)$$

Ahora realizando el producto cruz $\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)$:

$$\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)=\frac{ds}{dt}\vec{T}(t)\times\left(\frac{d^2s}{dt^2}\vec{T}(t)+\frac{ds}{dt}\vec{T}'(t)\right)$$

$$=\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}\left[\cancelto{0}{\vec{T}(t)\times\vec{T}(t)}\right]+\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\left[\underbrace{\vec{T}(t)\times\vec{T}'(t)}_{\text{ortogonales}}\right]$$

$\vec{A}\times\vec{A}=0\ \forall\vec{A}$

dado que $\vec{v}(t)\cdot\vec{v}'(t)=0\ \forall\vec{v}$

$$\frac{d}{dt}\begin{cases}\vec{v}\cdot\vec{v}=c,\ c\in\mathbb{R}\\ \vec{v}'\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}'=0\end{cases}$$

$$2\vec{v}\cdot\vec{v}'=0$$

$$\Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{v}'=0\quad\forall\vec{v}$$

$*\|\vec{A}\times\vec{B}\|=\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\sin(\theta)$

Como $\vec{T}(t)$ y $\vec{T}'(t)$ son ortogonales entonces

$$\|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\|=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\underbrace{\|\vec{T}(t)\times\vec{T}'(t)\|}_{*}$$

$$=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\|\vec{T}(t)\|\,\|\vec{T}'(t)\|\cancelto{1}{\sin(\pi/2)}$$

$$= \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cancel{\|\vec{T}(t)\|} \, \|\vec{T}'(t)\|$$

1 vector normalizado

Dividiendo por $\|\vec{r}'(t)\|^3 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3$:

$$K = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{\cancel{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^{\cancel{3}}} \|T'(t)\|$$

$$= \frac{\|T'(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|}$$