

Auxiliar 1

Curvas, parametrizaciones y operadores diferenciales

Profesor: Ricardo Carlos Freire
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

- a) Sea $\rho = f(\theta)$ la ecuación en coordenadas polares de una curva Γ . Demuestre que el largo de Γ en el intervalo $[\theta_1, \theta_2]$ es

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2} d\theta$$

- b) Demuestre que para el caso en que se cumpla $f'(\theta) = af(\theta)$, con a un número real, la curvatura de Γ en cualquier θ está dada por:

$$\kappa(\theta) = \frac{1}{f(\theta)\sqrt{a^2 + 1}}$$

Donde la curvatura se define como

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{T}'(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|}, \quad \text{con} \quad \vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$$

Pregunta 2

Sea $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ campos vectoriales y escalares suaves, respectivamente. Pruebe las siguientes identidades:

- a) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
- b) $\nabla \cdot (f\vec{F}) = f\nabla \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \nabla f$
- c) $\nabla \times (f\vec{F}) = f\nabla \times \vec{F} + \nabla f \times \vec{F}$
- d) $\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g$
- e) $\nabla \times (\nabla f) = 0$
- f) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$

Pregunta 3

Sea $g(r)$ una función de clase $C^1(\mathbb{R})$ tal que $g'(2) = 1$. Calcule la siguiente integral

$$\int_0^{2\pi} \left(-\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) |_{\vec{r}(t)} \cdot \vec{r}'(t) dt$$

donde $f(x, y) := g(\sqrt{x^2 + y^2})$ y $\vec{r}(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t))$.

Pregunta 4

Dado el campo vectorial $\vec{F} = (-z, y, x)$, responda justificando las siguientes preguntas:

- ¿Existe un campo escalar f tal que $\nabla f = \vec{F}$?
- ¿Existe un campo vectorial $\vec{G}$ tal que $\nabla \times \vec{G} = \vec{F}$?

Pregunta 5 (propuesto)

Supongamos que C es una curva suave en el plano o en el espacio dada por $\vec{r}(s)$, donde s es el parámetro de longitud de arco. La curvatura κ en s es

$$\kappa = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\| = \left\| \vec{T}'(s) \right\|$$

a) Demuestre usando regla de la cadena que la definición anterior es equivalente a

$$\kappa = \frac{\left\| \vec{T}'(t) \right\|}{\left\| \vec{r}'(t) \right\|}$$

donde $r(t)$ es la parametrización de la curva.

b) Y también equivalente a

$$\kappa(t) = \frac{\left\| \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \right\|}{\left\| \vec{r}'(t) \right\|^3}$$

Curva: Un conjunto Γ se llama curva si existe una función continua $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, llamada parametrización de la curva, tal que $\Gamma = \vec{r}([a, b])$.

Derivada de una Curva: La derivada de una curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ se define como el vector tangente a la curva en cada punto, y se denota como $\vec{r}'(t)$ o $\frac{d\vec{r}}{dt}$. Esta derivada se calcula tomando la derivada de cada componente de la función por separado.

Propiedades de la derivada de las funciones de valores vectoriales: Supongamos que $\vec{r}$ y $\vec{u}$ son funciones de valores vectoriales diferenciables de t , supongamos que f es una función de valor real diferenciable de t y supongamos que c es un escalar.

- $\frac{d}{dt}[c\vec{r}(t)] = c\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$
- $\frac{d}{dt}[\vec{r}(t) \pm \vec{u}(t)] = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \pm \frac{d\vec{u}(t)}{dt}$
- $\frac{d}{dt}[f(t)\vec{u}(t)] = f'(t)\vec{u}(t) + f(t)\frac{d\vec{u}(t)}{dt}$
- $\frac{d}{dt}[\vec{r}(t) \cdot \vec{u}(t)] = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \cdot \vec{u}(t) + \vec{r}(t) \cdot \frac{d\vec{u}(t)}{dt}$
- $\frac{d}{dt}[\vec{r}(t) \times \vec{u}(t)] = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \times \vec{u}(t) + \vec{r}(t) \times \frac{d\vec{u}(t)}{dt}$
- $\frac{d}{dt}[\vec{r}(f(t))] = \frac{d\vec{r}(f(t))}{dt}f'(t)$

Teorema de Clairaut (Clairaut-Schwarz):

Sea $f(x, y)$ una función de clase C^2 en un dominio abierto $D \subseteq \mathbb{R}^2$, donde (x, y) son las variables independientes. Si las derivadas parciales cruzadas $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ son continuas en D , entonces:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \quad \text{para todo } (x, y) \in D.$$

Coordenadas Cilíndricas: La relación entre las coordenadas cartesianas y cilíndricas viene dada principalmente por:

$$T(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$$

Coordenadas Esféricas: La relación entre las coordenadas cartesianas y esféricas viene dada principalmente por:

$$T(r, \theta, \phi) = (r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi)$$

Longitud de Curva: Se define la longitud de curva en el tiempo t como:

$$s(t) = \int_a^t \left\| \frac{d\vec{r}(\tau)}{d\tau} \right\| d\tau$$

Resumen campos y operadores diferenciales

Campo Escalar: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no vacío. Se le llamará campo escalar a toda función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Campo Vectorial: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no vacío. Se le llamará campo vectorial a toda función $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Visto de otra forma, sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base de $\mathbb{R}^n$ y $\{F_i\}_{i=1}^n$ campos escalares tal que $F_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$, entonces:

$$\vec{F}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n F_i(\vec{x}) \vec{e}_i$$

Gradiente de un campo escalar: Sea f un campo escalar, al menos C^1 , se define el gradiente de f como:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$$

Línea de flujo: Dado un campo vectorial $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ suficientemente diferenciable, una línea de flujo es una curva $\vec{r}(t)$ que satisface:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{F}(\vec{r}(t))$$

Gradiente de un campo vectorial: Sea $\vec{F} = F_1 \hat{i} + F_2 \hat{j} + F_3 \hat{k}$ un campo vectorial de clase C^1 . Se define el gradiente de $\vec{F}$ como:

$$\nabla \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Divergencia: Sea $\vec{F} = F_1 \hat{i} + F_2 \hat{j} + F_3 \hat{k}$ un campo vectorial de clase C^1 . Se define la divergencia de $\vec{F}$ como:

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Rotor: Sea $\vec{F} = F_1 \hat{i} + F_2 \hat{j} + F_3 \hat{k}$ un campo vectorial de clase C^1 . Se define el rotor de $\vec{F}$ como:

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \hat{k}$$