Departamento de Ingeniería Matemática
MA2001-2 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Alexander Frank M.
Auxiliar: Maximiliano S. Lioi

Resumen Cálculo en Varias Variables

1. Topología

Def 1 *Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Una función $||\cdot|| : E \to \mathbb{R}$ se dice que es una norma sobre E si*

1. $\forall x \in E$ *se tiene* $||x|| \geq 0$ *y* $||x|| = 0 \iff x = 0$
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ *se tiene* $\|\lambda x\| = |\lambda| ||x||$
3. $\forall x, y \in E, ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Def 2 *Dado E un espacio vectorial, decimos que el par $(E, ||\cdot||)$ es un espacio vectorial normado (e.v.n) para $||\cdot||$ una norma sobre E*

Obs. 1 *Algunas normas sobre $\mathbb{R}^n$ son las normas p para $p > 1$ de la forma*

$$||x||_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots |x_n|^p}$$

Cuando $p = \infty$ definimos $||x||_\infty = \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\}$

Def 3 *En un espacio vectorial E sobre $\mathbb{R}$, un producto interno es una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ que satisface*

- ***(Bilinealidad)*** $\langle ax + by, z\rangle = a\langle x, z\rangle + b\langle y, z\rangle$ $\langle x, ay + bz\rangle = a\langle x, y\rangle + b\langle x, z\rangle$
- ***(Simetría)*** $\forall x, y \in E, \quad \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
- ***(Positividad)*** $\langle x, x\rangle > 0 \quad \forall x \in E \setminus \{0\}$.

Obs. 2 *En $\mathbb{R}^n$ el producto interno usual viene dado por $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$*

Obs. 3 *Para E un espacio vectorial con producto interno, se tiene que $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ es una norma en E.*

Prop 1 (Desigualdad de Cauchy-Schwartz) *Se tiene que*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle x, y\rangle \leq ||x|| ||y||$$

Def 4 *Si $p, q > 1$ satisfacen $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ decimos que p y q son Hölder conjugados.*

Prop 2 (Desigualdad de Young) *Si p y q son Hölder conjugados, entonces se tiene que*

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Prop 3 (Desigualdad de Hölder) *Si p y q son Hölder conjugados, entonces se tiene que*

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq ||x||_p ||y||_q$$

Def 5 (Bola abierta y cerrada) *Sea $(E, ||\cdot||)$ un e.v.n, definimos la bola abierta de centro $x \in E$ y radio r como el conjunto*

$$B_r(x) = \{y \in E : ||x - y|| < r\}$$

Definimos la bola cerrada de mismo centro y radio como

$$\overline{B_r(x)} = \{y \in E : ||x - y|| \leq r\}$$

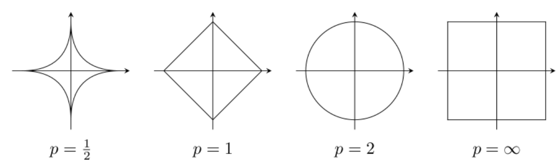

Figura 1: Bola unitaria en $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$, el caso $p = 1/2$ es especial pues no genera espacio vectorial normado ya que $\|\cdot\|_{1/2}$ no cumple desigualdad triangular.

Def 6 *Sea $(E, ||\cdot||)$ un espacio vectorial normado y $A \subset E$, decimos que A es abierto si*

$$\forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } B_\varepsilon(x) \subset A$$

Def 7 *Decimos que A es cerrado si A^c es abierto*

Obs. 4 *Se puede extender la noción de abierto sobre espacios más generales que un e.v.n. Consideramos un conjunto X, decimos que $\tau \subset \mathcal{P}(E)$ es una topología si satisface*

- $X, \varnothing \in \tau$
- *Si* $(A_i)_{i\in I} \subseteq \tau$, *entonces* $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$ *donde I puede ser o no finito*
- *Si* $(A_i)_{i=1}^n \subseteq \tau$, *entonces* $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$

llamamos a los elementos $A \in \tau$ abiertos y definimos al par (X, τ) como espacio topológico.

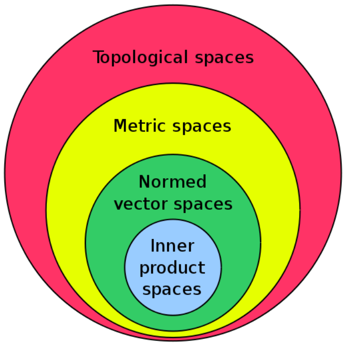

Figura 2: Contenciones sobre distintas clases de espacios.

Def 8 *Decimos que* $A \subset E$ *es acotado si* $\exists r > 0$ *tal que* $A \subset B(0, r)$

Teo 1 *Para* $(E, ||\cdot||)$ *un espacio vectorial normado se tiene*

- E *y* $\varnothing$ *son abiertos*
- *Si* $(A_i)_{i\in I}$ *es una familia de abiertos, entonces* $\bigcup_{i\in I} A_i$ *es abierto*
- *Si* $(A_i)_{i=1}^n$ *es una familia finita de abiertos, entonces* $\bigcap_{i=1}^n A_i$ *es abierto*

Def 9 *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *un espacio vectorial normado, sea* $A \subseteq E$*. Definimos interior, exterior, frontera y adherencia (o cerradura) de un conjunto.*

1. $\text{int}(A) = \{x \in E, \exists B(x, \delta) \subseteq A\}$
2. $\text{adh}(A) = \{x \in E, \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \varnothing\}$
3. $\text{Fr}(A) = \text{adh}(A) \setminus \text{int}(A)$

Teo 2 *Se tienen las propiedades*

1. $\text{int}(A)$ *es abierto.*
2. $\text{adh}(A) = \text{ext}(A)^c = \text{int}\,(A^c)^c$
3. $\text{int}(A) \subseteq A$
4. $A \subseteq \text{adh}(A)$
5. $A \subseteq B \Longrightarrow \text{int}(A) \subseteq \text{int}(B)$
6. $A \subseteq B \Longrightarrow adh(A) \subseteq adh(B)$
7. $\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)$
8. $adh(A)$ *es cerrado.*
9. A *es cerrado* $\Longleftrightarrow A = adh(A)$
10. A *es abierto* $\Longleftrightarrow A = \text{int}(A)$

Obs. 5 *La adherencia de un conjunto es también el conjunto cerrado más pequeño en el sentido de la inclusión que contiene al conjunto, análogamente, el interior de un conjunto coincide con el conjunto abierto más grande que está contenido en él, esto pues, la unión de abiertos es abierto y la intersección de cerrados es cerrado y entonces se tiene que:*

- $\text{int}(A) = \bigcup_{\mathcal{O}\subset A, \mathcal{O} \textit{ es abierto}} \mathcal{O}$
- $\text{Adh}(A) = \bigcap_{A\subset\mathcal{C}, \mathcal{C} \textit{ es cerrado}} \mathcal{C}$

2. Sucesiones, convergencia y completitud

Def 10 (Convergencia en un e.v.n) *Sea* (s_n) *una sucesión en* $(E, \|\cdot\|)$*, sea* $\ell \in E$*. Se dice que* (s_n) *converge a* ℓ *ssi:*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \|s_n - \ell\| \leq \epsilon$$

Def 11 (Sucesión de Cauchy) *Dado* E *un e.v.n, una sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ *es de Cauchy si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* n_0 *tal que*

$$||x_n - x_m|| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$$

Intuitivamente una sucesión es de Cauchy cuando sus elementos tienden a acumularse en una región cuyo tamaño puede tomarse tan pequeño como uno quiera.

Def 12 *Si* E *es un espacio vectorial normado tal que todas las sucesiones de Cauchy convergen, decimos que el espacio es completo y que* E *es un espacio de Banach*

Prop 4 *Toda sucesión convergente es de Cauchy*

Prop 5 *Toda sucesión de Cauchy es acotada*

Def 13 *Si* $\mathcal{H}$ *es un espacio vectorial con producto interno tal que* $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ *genera una norma que hace completo a* $\mathcal{H}$*, decimos que* $\mathcal{H}$ *es un espacio de Hilbert*

Obs. 6 *Si consideramos el espacio vectorial de dimensión infinita*

$$L^2([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty\}$$

junto a el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)$*, tenemos la norma inducida*

$$||f||_2 = (\int_a^b f(x)^2 dx)^{1/2}$$

tal que $(L^2([a, b]), \|\cdot\|_2)$ *es un espacio de Hilbert*

Teo 3 (de Representación de Riesz) *Sea* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert y sea* $\psi : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ *una función lineal continua, entonces existe un único elemento* $h \in \mathcal{H}$ *tal que*

$$\psi(x) = \langle h, x\rangle, \ \forall x \in \mathcal{H}$$

Obs. 7 *Si denotamos*

$$\mathcal{H}^* := \{\psi : \mathcal{H} \to \mathbb{R} | \psi \text{ es lineal y continuo}\}$$

el espacio dual de $\mathcal{H}$, entonces el teorema anterior implica que si $\mathcal{H}$ es Hilbert, entonces

$$\mathcal{H} \cong \mathcal{H}^*$$

es decir, $\mathcal{H}$ y su dual son isométricamente isomorfos

Teo 4 *Toda función lineal $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua, más aún, se puede representar por una matriz en $\mathbb{R}^{m\times n}$*

Def 14 *Decimos que dos normas $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_2$ son equivalentes si $\exists C_1, C_2 > 0$ tal que $\forall x \in E$, $||x||_1 \leq C_1||x||_2$ y $||x||_2 \leq C_2||x||_1$*

Prop 6 *Para dos normas equivalentes $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_2$, si x_n converge a x en la norma $||\cdot||_1$, es decir, $||x_n - x||_1 \to 0$, entonces x_n converge a x en la norma $||\cdot||_2$ y viceversa.*

Teo 5 *En $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes*

Teo 6 (Completitud de $\mathbb{R}^n$) *En $\mathbb{R}^n$ toda sucesión de Cauchy $(x_n)_n$ converge a un punto $x \in \mathbb{R}^n$*

Teo 7 *Se tiene que $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Banach, i.e, es un e.v.n completo.*

Teo 8 (Caracterización de los conjuntos cerrados) *Se tiene que $A \subseteq E$ es cerrado si y sólo si toda $(s_n) \subseteq A$ convergente tiene límite en A.*

Teo 9 *Cualquier conjunto cerrado contiene a su frontera. Mejor aún, si la frontera de un conjunto está incluida en el conjunto mismo, entonces el conjunto es cerrado.*

Def 15 *Una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es una secuencia de la forma*

$$(s_k)_n = \begin{pmatrix} s_k^1 \\ \vdots \\ s_k^n \end{pmatrix}$$

donde $\left(s_k^1\right), \ldots, \left(s_k^n\right)$ son sucesiones en $\mathbb{R}$.

Def 16 (Convergencia en $\mathbb{R}^n$) *Decimos que la sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ converge a $x \in \mathbb{R}^n$ si:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n \geq n_0, ||x_k - x|| < \varepsilon$$

para $||\cdot||$ alguna norma en $\mathbb{R}^n$ y lo denotamos $x_k \to x$.

Obs. 8 *Equivalentemente, para $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ se tiene*

$$x_n \to x \iff ||x_n - x|| \to 0$$

Prop 7 (Álgebra de sucesiones) *Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $\mathbb{R}^n$ convergentes a x e y respectivamente, se tienen las siguientes propiedades*

- $x_n + \lambda y_n \to x + \lambda y \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- $a_n x_n \to ax$ *para* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *tal que* $a_n \to a$
- $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$

Prop 8 *Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Luego*

$$x_n \to x \iff x_k^i \to x^i \quad \forall i = 1, \cdots, n$$

Es decir, una sucesión converge si y solo converge por coordenadas.

Prop 9 *Toda subsucesión de una sucesión convergente converge al mismo límite que la sucesión original*

Def 17 (Sucesión acotada) *Decimos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ es acotada si $\exists K > 0$ tal que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, ||x_n|| \leq K$$

Def 18 (Conjunto compacto en $\mathbb{R}^n$) *Decimos que $A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si es cerrado y acotado*

Def 19 (Recubrimiento abierto) *Sea (X, τ) espacio topológico, $U \subset X$ y $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ una familia de abiertos, si $U \subset \cap_{i\in I}\mathcal{O}_i$, entonces decimos que $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de U, o bien decimos que es una cubierta abierta de U.*

Def 20 (Conjunto compacto) *Sea (X, τ) espacio topológico y $K \subset X$, decimos que K es compacto si para todo recubrimiento abierto $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ de K, existe un subrecubrimiento finito $(\mathcal{O}_i)_{i=1}^n$ de K, i.e, $K \subset \cap_{i=1}^n \mathcal{O}_i$*

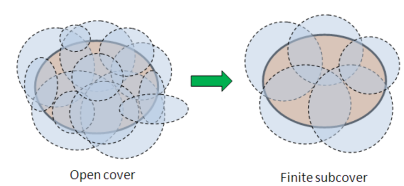

Figura 3: Conjunto compacto junto a un recubrimiento abierto y una respectiva subcubierta finita.

Teo 10 (Bolzano-Weierstrass) *Toda secuencia $(x_n)_n$ definida sobre un compacto K posee una subsecuencia $(x_{n_k})_k$ convergente y cuyo límite está en K*

Teo 11 (Heine-Borel) *Si $K \subset \mathbb{R}^n$, las siguientes son equivalentes*

(I) *K es cerrado y acotado*

(II) *K es compacto*

(III) *Toda secuencia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ posee una subsecuencia convergente en K*

Teo 12 (Riesz) *Sea E e.v.n., $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ es compacta si y solo si E es de dimension finita.*

Teo 13 (Baire) *Sea X un espacio métrico completo, sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una familia de cerrados de interior vacío, entonces:*

$$Int\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) = \emptyset$$

3. Límites y continuidad

Def 21 (Grafo) *Sea $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ una función, definimos su grafo como el conjunto*

$$\mathrm{Gr}(f):=\{(x,f(x)):x\in D\}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$$

Def 22 (Conjunto de nivel) *Sea $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ una función y $\alpha\in\mathbb{R}$. Definimos el conjunto de nivel α de f como el conjunto*

$$N_\alpha(f):=\{x\in\Omega:f(x)=\alpha\}$$

Obs. 9 *Si además f es continua, entonces $N_\alpha(f)$ es cerrado $\forall\alpha\in\mathbb{R}$*

Def 23 (Límite de funciones) *Sea $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ una función, $\bar{x}\in\mathrm{Adh}(\Omega)$ y $L\in\mathbb{R}^m$. Decimos que $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a $\bar{x}$, denotado como $\lim_{x\to\bar{x}}f(x)=L$ si*

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:||x-\bar{x}||<\delta\implies||f(x)-L||<\varepsilon$$

Prop 10 *Sea $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ una función, $\bar{x}\in\mathrm{Adh}(\Omega)$ y $L\in\mathbb{R}^m$. Entonces $\lim_{x\to\bar{x}}f(x)=L$ equivale a que*

$$\forall(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\Omega:x\to\bar{x},f(x_n)\to L$$

Prop 11 (Álgebra de límites) *Sean $f,g:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, entonces*

$$1.\ \lim_{x\to\bar{x}}f(x)+g(x)=\lim_{x\to\bar{x}}f(x)+\lim_{x\to\bar{x}}g(x)$$

$$2.\ \lim_{x\to\bar{x}}\lambda f(x)=\lambda\lim_{x\to\bar{x}}f(x)\quad\forall\lambda\in\mathbb{R}$$

En el caso en que $f,g:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, se tiene además

$$3.\ \lim_{x\to\bar{x}}f(x)g(x)=\lim_{x\to\bar{x}}f(x)\lim_{x\to\bar{x}}g(x)$$

$$4.\ \lim_{x\to\bar{x}}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to\bar{x}}f(x)}{\lim_{x\to\bar{x}}g(x)}$$

Def 24 (Continuidad) *Sea $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ una función, $\bar{x}\in\mathrm{Adh}(\Omega)$, decimos que f es continua en $\bar{x}$ si*

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:||x-\bar{x}||<\delta\implies||f(x)-f(\bar{x})||<\varepsilon$$

Prop 12 *Se tiene que $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ es continua en $\bar{x}$ es equivalente a que*

$$\forall(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\Omega:x_n\to\bar{x},f(x_n)\to f(\bar{x})$$

Teo 14 *Se tiene que $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ es continua en $\bar{x}$ si cada una de las funciones $(f_i)_{i=1}^m$ que define por coordenadas son continuas en $\bar{x}$*

Teo 15 (Composición de funciones continuas) *Si $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ y $g:D\subseteq\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$ funciones continuas en $x\in\Omega$ y $f(x)\in f(\Omega)\subseteq D$, entonces $g\circ f$ es continua en $x\in\Omega$*

Teo 16 (Caracterización global de la continuidad) *Se tiene que $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ es continua en Ω si y solo sí la preimagen de todo abierto $A\subseteq\mathbb{R}^m$ es abierto en $\mathbb{R}^n$, es decir,*

$$f^{-1}(A)\text{ es abierto en }\mathbb{R}^n,\quad\forall A\subseteq\mathbb{R}^m\text{ abierto}$$

Obs. 10 *También se tiene la equivalencia para f continua con que $f^{-1}(C)$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$ para todo C cerrado en $\mathbb{R}^m$.*

Obs. 11 *El teorema anterior sigue siendo cierto en el caso general de los espacios topológicos respecto a la continuidad de una función.*

Prop 13 (Algebra de funciones continuas) *Si f,g son funciones continuas, entonces $f+g$ es continua y λf es continuas $\forall\lambda\in\mathbb{R}$*

Teo 17 *Sea $K\subset\mathbb{R}^n$ compacto y $f:K\to\mathbb{R}^m$ una función continua, entonces $f(K)\subseteq\mathbb{R}^m$ es compacto.*

Teo 18 (Weierstrass) *Toda función continua f definida sobre un compacto K de $\mathbb{R}^n$ alcanza su mínimo y máximo en K*

4. Diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$

Def 25 (Diferenciabilidad) *Sea $f:U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ una función y U abierto. Decimos que f es diferenciable en x si existe $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ tal que:*

$$\lim_{h\to0}\frac{||f(x+h)-f(x)-Ah||}{||h||}=0$$

Denotamos a dicha matriz por $Df(x)$ o $f'(x)$ y decimos que es la derivada de f en x y diremos que f es diferenciable si lo es en cada punto de U.

Prop 14 *Se tiene que $f:U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ es diferenciable en $x\in U$ abierto si y solo si existe $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, que denotamos $Df(x)$ o $f'(x)$, que hace cumplir la igualdad:*

$$f(x+h)=f(x)+Df(x)h+o(h)$$

donde $o:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ es tal que

$$\lim_{h\to0}\frac{||o(h)||}{||h||}=0$$

Def 26 (Diferencial) *Si f es diferenciable sobre todo $U\subseteq\mathbb{R}^n$ abierto, definimos el diferencial de f como la aplicación*

$$Df:U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{m\times n}$$

$$x\to Df(x)$$

Si el diferencial de f es continuo en su dominio, es decir, $Df\in C(U,\mathbb{R}^{m\times n})$, entonces decimos que $f\in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$

Obs. 12 *Decimos que $Df \in C(U, \mathbb{R}^{m\times n})$ si para toda secuencia $x_n \to x$ en U se tiene que $Df(x_n) \to Df(x)$ en $\mathbb{R}^{m\times n}$, es decir,*

$$||x_n - x||_{\mathbb{R}^n} \to 0$$

implica que

$$||Df(x_n) - Df(x)||_{\mathbb{R}^{m\times n}} \to 0$$

donde la norma $||\cdot||_{\mathbb{R}^{m\times n}}$ se define para una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ como

$$||A||_{\mathbb{R}^{m\times n}} = (\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^2)^{1/2}$$

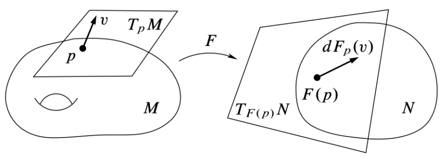

Figura 4: El diferencial.

Prop 15 (Unicidad) *Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $x \in U$ abierto, entonces la derivada de $Df(x)$ es única.*

Teo 19 *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ función y $x \in U$ abierto. Se tiene que si f es diferenciable en x, entonces f es continua en x.*

Prop 16 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^TAx + b^Tx + c$ para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$, entonces la derivada de f en x está dada por*

$$Df(x) = x^T(A + A^T) + b^T$$

Prop 17 (Álgebra de Derivadas) *Sean $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $x \in U$ abierto tal que f y g son diferenciables en x. Se tiene que:*

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, D(f + \lambda g)(x) = Df(x) + \lambda Dg(x)$
- *Si* $m = 1, D(fg)(x) = g(x)Df(x) + f(x)Dg(x)$
- *Si f y g son diferenciables en U, entonces $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $D(f + \lambda g) = Df + \lambda Dg$*

Teo 20 (Regla de la Cadena) *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, g : V \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ donde U, V son abiertos y $x \in U$ con $f(U) \subseteq V$ y $f(x) \in V$. Supongamos f es diferenciable en x y g es diferenciable en $f(x)$. Entonces se tiene que:*

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x))Df(x)$$

5. Derivadas Parciales y Regla de la Cadena

Def 27 (Derivada Direccional) *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ función, $x \in U$ abierto y $v \in \mathbb{R}^n$. Decimos que f es derivable en x en la dirección v si existe el límite:*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

En tal caso denotamos dicho límite por $Df(x; v)$

Def 28 (Derivada Parcial) *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ función, $x \in U$ abierto y $e_i \in (e_j)_{j\in\{1,\cdots,n\}}$ vector de la base canónica. Decimos que f es derivable en x con respecto a x_i si existe el límite:*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t}$$

De existir, denotamos

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t}$$

Teo 21 *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ función y $x \in U$ abierto. Luego, si f es diferenciable en x, entonces la derivada direccional de f en x está bien definida para toda dirección $v \in \mathbb{R}^n$ y se tiene que:*

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, Df(x)v = Df(x; v)$$

Def 29 (Gradiente) *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $x \in U$ abierto. Definimos el gradiente de f en x, denotado $\nabla f(x)$ como el vector de $\mathbb{R}^n$ compuesto por las derivadas parciales de f en x, i.e,*

$$\nabla f(x) = Df(x)^T = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x))^T$$

Notar que con esta definición podemos escribir $Df(x)h = \langle \nabla f(x), h\rangle$

Teo 22 *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en $x \in U$ abierto. Entonces necesariamente $Df(x)$ es la matriz conformada por las derivadas parciales, esto es,*

$$(Df(x))_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$$

para $i \in \{1, \cdots, m\}, j \in \{1, \cdots, n\}$

Explícitamente,

$$Df(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

De igual manera podemos escribir

$$Df(x) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(x)^T \\ \vdots \\ \nabla f_m(x)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Df_1(x) \\ \vdots \\ Df_m(x) \end{bmatrix}$$

Teo 23 *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ función y $x \in U$ abierto. Supongamos que las derivadas parciales*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x), \quad i \in \{1, \cdots, m\}, j \in \{1, \cdots, n\}$$

existen y son continuas en $x \in U$, entonces f es diferenciable en x.

Corolario 1 (Regla de la Cadena) *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, g : V \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ donde U, V son abiertos y $x \in U$ con $f(U) \subseteq V$ y $f(x) \in V$. Supongamos f es diferenciable en x, g es diferenciable en $f(x)$ y denotamos $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ a la función $F = g \circ f$. Entonces se tiene que:*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)$$

para todo $i \in \{1, \cdots, p\}$ y $j \in \{1, \cdots, n\}$

Obs. 13 *El corolario anterior es directo de usar*

$$(DF(x))_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)$$

y la regla de la cadena mediante

$$(D(g \circ f)(x))_{ij} = (Dg(f(x))Df(x))_{ij}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)$$

Corolario 2 *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to U \subset \mathbb{R}^n$, entonces para $\Psi : I \to \mathbb{R}$ dado por $\Psi = f \circ \gamma$ se tiene que*

$$\frac{d\Psi}{dt}(t) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

donde $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t) \cdots \gamma_n'(t))^T$

6. Teorema del Valor Medio, Gradientes y Planos Tangentes

Teo 24 *Si $\nabla f(x_0) \neq 0$, entonces el vector unitario $v_0 = \frac{\nabla f(x_0}{\|\nabla f(x_0)\|}$ representa la dirección de máximo crecimiento de f en el punto x_0*

Teo 25 *El gradiente $\nabla f(x)$ es siempre ortogonal (o normal) a la curva de nivel que pasa por x*

Def 30 (Hiperplano) *En $\mathbb{R}^n$ un hiperplano es el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^n$ tales que dado un punto base $x_0 \in \mathbb{R}^n$, el vector que une x_0 y x es ortogonal a otro vector "normal" $N \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, fijo y previamente dado. En otras palabras, el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^n$ tales que*

$$\langle N, x - x_0 \rangle = 0$$

Def 31 (Hipersuperficie) *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1 en U abierto. Una hipersuperficie suave en $\mathbb{R}^n$, definida por f (denotada $S(f)$), es el conjunto de puntos (no vacío) $x \in \mathbb{R}^n$, soluciones de la ecuación*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_d) = 0, \quad x = (x_1, \ldots, x_d),$$

y donde además se satisface $\nabla f(x) \neq 0$ en tales puntos.

En otra palabras, $S(f) := \{x \in U : f(x) = 0, \nabla f(x) \neq 0\}$

Obs. 14 *La noción de hipersuperficie es muy similar a la noción de conjunto de nivel cero para f que denotamos $N_0(f)$ con la sola diferencia de que ahora pedimos f de clase C^1. En otras palabras, una hipersuperficie es un subconjunto particular del conjunto de nivel cero para f*

Def 32 (Hiperplano tangente) *Sea S una hipersuperficie suave determinada por una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Sea también $x_0 \in S$. Definimos el hiperplano tangente a S en x_0 como el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^n$ tales que*

$$\langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle = 0$$

Obs. 15 *Lo anterior dice que para f diferenciable en x_0, su gradiente es siempre ortogonal a la hipersuperficie definida por f*

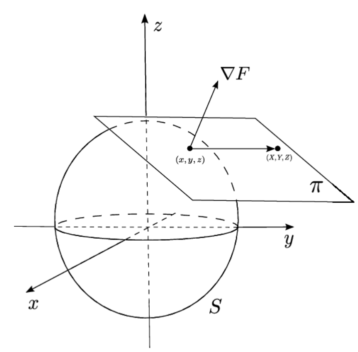

Figura 5: Plano tangente π sobre la hipersuperficie que define F en un junto al gradiente en un punto.

Teo 26 *Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable, entonces el hiperplano en $\mathbb{R}^{n+1}$ centrado en $(x_0, f(x_0)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ de ecuación*

$$y = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0)$$

es tangente al grafo de f en $(x_0, f(x_0))$. Más aún, el vector

$$\begin{bmatrix} \nabla f(x_0) \\ -1 \end{bmatrix}$$

es perpendicular (o normal) a este hiperplano y al grafo de f

Def 33 (Conjunto convexo) *Sea E un espacio vectorial, diremos que $C \subset E$ es convexo si para cualquier* *par de puntos $x, y \in C$, el segmento que une x e y, denotado por $[x, y]$ y definido por*

$$[x, y] := \{z \in E : z = \lambda x + (1 - \lambda)y, \quad \lambda \in [0, 1]\}$$

está contenido en C.

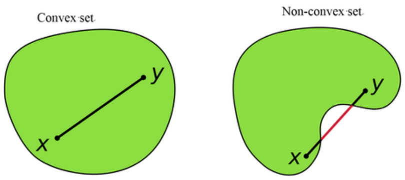

Figura 6: Conjunto convexo y no convexo en $\mathbb{R}^2$.

Def 34 (Cono) *Sea E un espacio vectorial, diremos que $C \subset E$ es un cono si $\forall x \in C$ y $\forall \lambda > 0$ se tiene que $\lambda x \in C$*

Teo 27 (Teorema del Valor Medio) *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en U abierto y convexo. Entonces, para cualquier par de puntos $x, y \in U$, existe $\lambda \in [0, 1]$ tal que*

$$f(x) - f(y) = \langle \nabla f(z), x - y \rangle$$

donde $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, es decir $z \in [x, y]$

7. Teorema de la Función Inversa/Implícita y Derivadas de Orden Superior

Teo 28 (Teorema de la Función Inversa) *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 en Ω. Supongamos que para algún $x_0 \in \Omega$, la derivada $Df(x_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es invertible (i.e, $\det(Df(x_0)) \neq 0$). Entonces existen abiertos U, V con $x_0 \in U \subset \Omega$ e $y_0 := f(x_0) \in V$, tales que $f|_U : U \to V$ es un difeomorfismo de clase C^1, esto es, una biyección tal que $f|_U^{-1}$ es de clase C^1. Además, por ser $(f|_U)^{-1} : V \to U$ continua y diferenciable en todo punto de V, se tiene $D(f|_U)^{-1}(f|_U(x_0)) = (D(f|_U)(x_0))^{-1}$*

Teo 29 (Teorema de la Función Implícita) *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 y $(x_0, y_0) \in \Omega$ tal que $f(x_0, y_0) = 0$. Sea $Df(x_0, y_0) = [D_x f(x_0, y_0), D_y f(x_0, y_0)]$ la derivada de f en (x_0, y_0), supongamos que $D_y f(x_0, y_0)$ es invertible. Entonces existen abiertos U, W con $(x_0, y_0) \in U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ y $x_0 \in W$ tales que para cada $x \in W$ existe un único y tal que $(x, y) \in U$ y $f(x, y) = 0$, lo que define una función $g : W \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1, en particular $y_0 = g(x_0)$, de manera que*

$$f(x, g(x)) = 0, \forall x \in W$$

además

$$Dg(x) = -D_y f(x, g(x))^{-1} D_x f(x, g(x))$$

Def 35 (Matriz Hessiana) *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función de clase $C^2(U)$. Llamamos matriz Hessiana de f en x a la matriz $D(\nabla f)(x)^T$, que denotamos:*

$$D^2 f(x) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{bmatrix}$$

otras formas comunes para denotar la matriz Hessiana son $Hf(x)$ o bien $f''(x)$.

Prop 18 *Para $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función de clase $C^2(U)$ y $\bar{x} \in U$, $D^2 f(\bar{x})$ es simétrica, y por lo tanto sus valores propios son reales.*

Teo 30 (Taylor) *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^{k+1} en A, $k \geq 1$, con A abierto. Sean también $x_0 \in A$ y $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_0 + th \in A$, para todo $t \in [0, 1]$. Entonces, la siguiente expansión de f es válida:*

$$f(x_0 + h) = P_k(x_0, h) + R_{k+1}(x_0, h) \tag{1}$$

$$P_k(x_0, h) := \sum_{\ell=0}^{k} T_\ell(x_0, h)$$

donde $T_\ell(x_0, h)$ es el monomio de Taylor de orden ℓ, dado por la expresión

$$T_\ell(x_0, h) := \frac{1}{\ell!} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_\ell=1}^{n} \frac{\partial^\ell f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_\ell}}(x_0) h_{i_1} \cdots h_{i_\ell},$$

para $1 \leq \ell \leq k$, y $R_{k+1}(x_0, h)$ es el resto de orden $k+1$ de la expansión (1), dado por

$$R_{k+1}(x_0, h) := \frac{1}{(k+1)!} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_{k+1}=1}^{n} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k+1}}}(x_0 + sh) h_{i_1} \cdots h_{i_{k+1}}$$

para cierto $s \in [0, 1]$.

Corolario 3 *Supongamos que $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^2 en A, y sean $x_0 \in A$, $h \in \mathbb{R}^n$ pequeño. Entonces, el polinomio de Taylor de orden dos para f en torno a x_0, denotado $P_2(x_0, h)$ viene dado, explícitamente, por la expresión*

$$f(x_0) + \nabla f(x_0) h + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j,$$

Equivalentemente, se puede escribir

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0) h + \frac{1}{2} h^T D^2 f(x_0) h$$

o bien, escogiendo $h = x - x_0$ tenemos $f(x) \approx$

$$f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T D^2 f(x_0)(x - x_0)$$

para x cerca de x_0.

8. Optimización

Def 36 (Punto extremo) *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sea $\bar{x} \in U$. Decimos que $\bar{x}$ es:*

(I) Mínimo local si $\exists \varepsilon > 0 : f(\bar{x}) \leq f(x)\ \forall x \in U \cap B(\bar{x}, \varepsilon)$

(II) Máximo local si $\exists \varepsilon > 0 : f(\bar{x}) \geq f(x)\ \forall x \in U \cap B(\bar{x}, \varepsilon)$

(III) Mínimo global si $f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in U$

(IV) Máximo global si $f(\bar{x}) \geq f(x) \quad \forall x \in U$

Si se cumple alguna de las definiciones anteriores, decimos que $\bar{x}$ es punto extremo.

Teo 31 (Fermat) *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sea $\bar{x} \in U$ punto extremo de f. Si f es diferenciable en $\bar{x}$, entonces $\nabla f(\bar{x}) = 0$*

Def 37 *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sea $\bar{x} \in U$. Decimos que $\bar{x}$ es punto crítico si f es diferenciable en $\bar{x}$ y $\nabla f(\bar{x}) = 0$*

Teo 32 (Condición Necesaria) *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función de clase $C^2(U)$ y $\bar{x} \in U$. Se tiene que:*

(I) $\bar{x}$ es mín. local $\Longrightarrow Hf(\bar{x})$ es semidef. positiva.

(II) $\bar{x}$ es máx. local $\Longrightarrow Hf(\bar{x})$ es semidef. negativa.

Teo 33 (Condición Suficiente) *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función de clase $C^2(U)$ y $\bar{x} \in U$ punto crítico de f. Se tiene que:*

(I) $Hf(\bar{x})$ es def. positiva $\Longrightarrow \bar{x}$ es mín. local.

(II) $Hf(\bar{x})$ es def. negativa $\Longrightarrow \bar{x}$ es máx. local.

Teo 34 *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función de clase $C^2(U)$ y $\bar{x} \in U$ punto crítico de f. Si $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ son los valores propios de $\mathrm{Hf}(\bar{x})$, se tiene que:*

(I) $\forall i \in [n], \lambda_i > 0 \Longrightarrow \bar{x}$ es mín. local.

(II) $\forall i \in [n], \lambda_i < 0 \Longrightarrow \bar{x}$ es máx. local.

(III) $\exists j, k \in [n] : \lambda_j \lambda_k < 0 \Longrightarrow \bar{x}$ es punto silla.

Teo 35 (Teorema de Multiplicadores de Lagrange) *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funciones de clase C^1. Sea S el conjunto de restricciones definidas por g como $S := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$. Supongamos que x^* es mínimo o máximo local para f en S y que $\{g_1(x_0), \cdots, g_m(x_0)\}$ son l.i, entonces existe $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tal que $D_x f(x^*) = (\lambda^*)^T Dg(x^*)$*

Obs. 16 *Definamos el Lagrangeano $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda \cdot g(x)$, bajo las hipótesis anteriores, se puede escribir equivalentemente con $(x^*, \lambda^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tal que $D_{x,\lambda} \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = 0$*

9. Integración en $\mathbb{R}^n$

Def 38 (Rectángulo en $\mathbb{R}^n$) *Dados n intervalos reales acotados $I_1, I_2, \cdots, I_n$, definimos el rectángulo $\mathcal{R}$ en $\mathbb{R}^n$, de lados $I_1, I_2, \cdots, I_n$ como el conjunto*

$$\mathcal{R} := I_1 \times I_2 \cdots \times I_n$$

*El **volumen** de $\mathcal{R}$ se define como*

$$\mathrm{vol}(\mathcal{R}) := \ell(I_1) \cdot \ell(I_2) \cdots \ell(I_n)$$

donde $\ell(I_k)$ es el largo del intervalo I_k

Def 39 (Partición de un conjunto en $\mathbb{R}^n$) *Sea $\mathcal{R}$ un rectángulo cerrado de la forma $\mathcal{R} = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$, y sean $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n$ particiones de cada uno de los intervalos $I_1, I_2, \ldots, I_n$, respectivamente. Una partición $\mathcal{P}$ de $\mathcal{R}$ es el conjunto*

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \times \cdots \times \mathcal{P}_d := \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{R} : x_i \in \mathcal{P}_i\}.$$

Def 40 (Suma inferior y superior) *Sea $f : \mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función acotada sobre un rectángulo cerrado $\mathcal{R}$, esto es, $|f| \leq C$ para todo $x \in \mathcal{R}$. Dada una partición $\mathcal{P}$ que genera subrectángulos abiertos y disjuntos $\{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots, \mathcal{R}_N\}$, definimos su correspondiente suma inferior (de f para $\mathcal{P}$), denotada $\mathcal{L}(f, \mathcal{P})$, y su suma superior (de f para $\mathcal{P}$), denotada por $\mathcal{U}(f, \mathcal{P})$, como las cantidades*

$$\mathcal{L}(f, \mathcal{P}) := \sum_{j=1}^{N} m_j \operatorname{vol}(\mathcal{R}_j), m_j := \inf_{x \in \mathcal{R}_j} f(x);$$
$$\mathcal{U}(f, \mathcal{P}) := \sum_{j=1}^{N} M_j \operatorname{vol}(\mathcal{R}_j), M_j := \sup_{x \in \mathcal{R}_j} f(x).$$

Def 41 (Refinamiento) *Sea $\mathcal{P}$ una partición de $\mathcal{R}$ un rectángulo. Decimos que $\mathcal{P}'$ es un refinamiento de $\mathcal{P}$ si $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$.*

Prop 19 *Sea $f : \mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función acotada sobre $\mathcal{R}$ rectángulo cerrado, y sean $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ particiones de $\mathcal{R}$. Entonces las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) Si $\mathcal{P}'$ es un refinamiento de $\mathcal{P}$, entonces

$$\mathcal{L}(f, \mathcal{P}) \leq \mathcal{L}(f, \mathcal{P}') \quad \text{y} \quad \mathcal{U}(f, \mathcal{P}') \leq \mathcal{U}(f, \mathcal{P}).$$

(2) Si ahora $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ son particiones arbitrarias del mismo rectángulo $\mathcal{R}$, entonces

$$\mathcal{L}(f, \mathcal{P}) \leq \mathcal{U}(f, \mathcal{P}')$$

(3) Las cantidades

$$\mathcal{L}\int_{\mathcal{R}} f := \sup\{\mathcal{L}(f, \tilde{\mathcal{P}}) : \tilde{\mathcal{P}} \text{ partición de } \mathcal{R}\},$$
$$\mathcal{U}\int_{\mathcal{R}} f := \inf\{\mathcal{U}(f, \tilde{\mathcal{P}}) : \tilde{\mathcal{P}} \text{ partición de } \mathcal{R}\}$$

están bien definidas y se tiene al desigualdad

$$\mathcal{L}\int_{\mathcal{R}} f \leq \mathcal{U}\int_{\mathcal{R}} f.$$

Def 42 (Función integrable) *Diremos que f es integrable sobre $\mathcal{R}$ si*

$$\mathcal{L}\int_{\mathcal{R}} f = \mathcal{U}\int_{\mathcal{R}} f$$

En tal caso, la integral de f sobre $\mathcal{R}$, denotada simplemente por $\int_{\mathcal{R}} f$, o bien $\int_{\mathcal{R}} f(x)dx$, corresponderá a cualquiera de estos valores.

Def 43 (Conjunto de medida cero) *Un conjunto A en $\mathbb{R}^n$ se dirá de medida cero si para cualquier $\varepsilon > 0$, es posible encontrar una colección de rectángulos cerrados $(\mathcal{R}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^n$, para los cuales*

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{R}_j, \quad y \quad \sum_{j\geq 1} \mathrm{vol}\,(\mathcal{R}_j) < \varepsilon$$

Prop 20 *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua con A cerrado, acotado y cuya frontera $\partial\Omega$ tiene medida cero. Entonces f es integrable en Ω*

Teo 36 (Condición de integrabilidad) *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función escalar acotada. Entonces f es Riemann-integrable en Ω sí y sólamente sí el conjunto de discontinuidades de f y la frontera de Ω tienen medida cero. En particular, toda función continua en Ω es integrable.*

Teo 37 (Teorema de Fubini) *Sea $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{R}_2 \subseteq \mathbb{R}^p$ dos rectángulos cerrados y sea $f : \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$ una función continua. Entonces se tienen las igualdades*

$$\int_{\mathcal{R}_1\times\mathcal{R}_2} f = \int_{\mathcal{R}_1} (\int_{\mathcal{R}_2} f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x = \int_{\mathcal{R}_2} (\int_{\mathcal{R}_1} f(x,y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$$

Teo 38 (Teorema del Cambio de Variables) *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado. Sea $T : U \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 en U e inyectiva sobre U. Si $f : T(U) \to \mathbb{R}$ es integrable sobre $T(U)$, entonces*

$$\int_{T(U)} f(y)\mathrm{d}y = \int_U (f\circ T)(x)|\det DT(x)|\mathrm{d}x$$

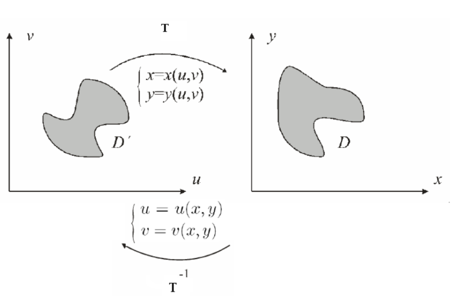

Figura 7: Interpretación de un cambio de variable en $\mathbb{R}^2$.

Prop 21 (Coordenadas Polares) *Para $r \geq 0$ y $\varphi \in [0, 2\pi)$ consideramos la transformación:*

$$T(r,\varphi) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$$

Entonces

$$|\det(DT(r,\varphi))| = r$$

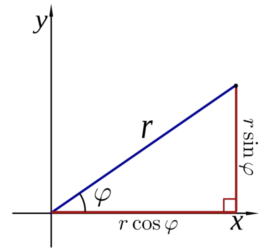

Figura 8: Coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$.

Prop 22 (Coordenadas Cilíndricas) *Para $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$ y $z \in \mathbb{R}$, consideramos la transformación:*

$$T(r,\theta,z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$$

Entonces

$$|\det(DT(r,\theta,z))| = r$$

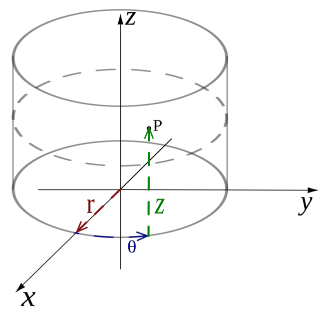

Figura 9: Coordenadas cilíndricas en $\mathbb{R}^3$.

Prop 23 (Coordenadas Esféricas) *Para $r \geq 0$ y $\theta \in [0, \pi)$ y $\varphi \in [0, 2\pi]$, consideramos la transformación:*

$$T(r,\theta,\varphi) = (r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta))$$

Entonces

$$|\det(DT(r,\theta,\varphi))| = r^2\sin(\theta)$$

El ángulo $\varphi \in [0, 2\pi]$ se denomina azimutal y el ángulo $\theta \in [0, \pi]$ se denomina colatitud.

Obs. 17 *La proposición anterior está escrita en término del convenio internacional, en el convenio estadounidense se intercambia los roles de θ y φ.*

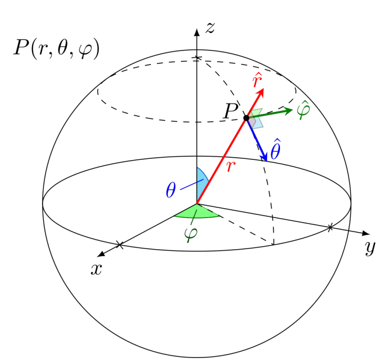

Figura 10: Coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3$.