

PREGUNTA 1

(a) (40 pts.) Denotemos por $\mathbb{R}_+$ al conjunto de los reales positivos. Muestre que existe un abierto $U \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ y funciones $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ que cumplen las siguientes condiciones:

- $(1, -2) \in U$, $f(1, -2) = 1$ y $g(1, -2) = 0$.
- Para todo $(x, y) \in U$

$$\begin{aligned} f(x, y)^5 - g(x, y)^2 &= xy + 3 \\ f(x, y)e^{g(x, y)} &= x^2 - y^2 \ln(x). \end{aligned}$$

[INDICACIÓN: Encuentre una función $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $F(1, -2, 1, 0) = 0$ y aplique el *Teorema de la función explícita*.]

(b) (20 pts.) Muestre que existen abiertos $V, W \subseteq \mathbb{R}^2$, con $(1, -2) \in V \subseteq U$ de modo que la función

$$\begin{aligned} h : V &\rightarrow W \\ (x, y) &\mapsto (f(x, y), g(x, y)) \end{aligned}$$

sea biyectiva, donde f y g son las funciones encontradas en la parte (a).

PAUTA PREGUNTA 1

(a) **Respuesta:** Siguiendo la indicación definimos

$$F(x, y, u, v) = (u^5 - v^2 - xy - 3, ue^v - x^2 + y^2 \ln(x)).$$

Evalúamos

$$\begin{aligned} F(1, -2, 1, 0) &= (1^5 - 0^2 - 1 \cdot (-2) - 3, 1 \cdot e^0 - 1^2 + (-2)^2 \cdot \ln(1)) \\ &= (0, 0). \end{aligned}$$

Calculamos la derivada

$$\begin{aligned} F'(x, y, u, v) &= \begin{pmatrix} -y & -x & 5u^4 & -2v \\ -2x + y^2/x & 2y \ln(x) & e^v & ue^v \end{pmatrix} \\ F'(1, -2, 1, 0) &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Chequeamos las hipótesis del *Teorema de la función implícita*: La función $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es C^1 (pues $F'(x, y, u, v)$ es continua en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$), el dominio $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$ es abierto, $(1, -2, 1, 0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$, $F(1, -2, 1, 0) = (0, 0)$, y por último la matriz formada por las dos últimas columnas de $F'(1, -2, 1, 0)$, es decir, la matriz $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, es invertible.

Entonces, parte de las conclusiones del teorema son:

- Existe $U \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tal que $(1, -2) \in U$.
- Si se escribe $(u, v) = G(x, y)$, entonces $G : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ es de clase C^1 y $G(1, -2) = (1, 0)$.
- $F(x, y, G(x, y)) = (0, 0)$ para todo $(x, y) \in U$.

Por lo tanto, interpretando lo anterior:

- Encontramos $U \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tal que $(1, -2) \in U$.
- Para ese U , si escribimos $G(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$, entonces $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, ambas son de clase C^1 , y además $f(1, -2) = 1$ y $g(1, -2) = 0$.
- Para todo $(x, y) \in U$,

$$\begin{aligned} F(x, y, f(x, y), g(x, y)) &= (0, 0) \\ (f(x, y)^5 - g(x, y)^2 - xy - 3, f(x, y)e^{g(x, y)} - x^2 + y^2 \ln(x)) &= (0, 0) \\ (f(x, y)^5 - g(x, y)^2, f(x, y)e^{g(x, y)}) &= (xy + 3, x^2 - y^2 \ln(x)), \end{aligned}$$

que es lo que se quería probar.

Distribución puntaje:

- Escoger F adecuada siguiendo la indicación (06 pts.)
- Calcular F' (07 pts.)
- Chequear todas las hipótesis del T.F.Impl. (12 pts.)
- Obtener las conclusiones del teorema (08 pts.)
- Concluir a partir de lo anterior (07 pts.)

(b) **Respuesta:** La función encontrada en la parte anterior

$$\begin{aligned} G : U &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (f(x, y), g(x, y)) \end{aligned}$$

es de clase C^1 y, como consecuencia del teorema de la función implícita

$$G'(1, -2) = - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

es invertible por ser la multiplicación de dos matrices invertibles.

Entonces se satisfacen las hipótesis del *Teorema de la función inversa* para G .

Por lo tanto se puede concluir que existen abiertos V y W tales que

- $(1, -2) \in V \subseteq U$.
- $G : V \rightarrow W$ es biyectiva.

Si llamamos $h = G|_V$ se tiene lo pedido.

Distribución puntaje:

- Chequear las hipótesis del T.F.Inv. para la función de la parte anterior (10 pts.)
- Aplicar el teorema y concluir (10 pts.)