PREGUNTA 2

Considere la función definida por $\varphi(x,y) = 3x - x^3 - 3y^2$ y el subconjunto del plano

$$\mathcal{K} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 9\right\}.$$

(a) (30 pts.) Clasifique los puntos críticos de φ (mínimo relativo, máximo relativo, silla) que se encuentran en el interior de $\mathcal{K}$.

(b) (30 pts.) Encuentre los valores máximo y mínimo de φ en $\mathcal{K}$ junto con los puntos del plano en donde estos valores se alcanzan.

PAUTA PREGUNTA 2

(a) **Respuesta:** Encontremos los puntos críticos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = 0 &\Longrightarrow 3 - 3x^2 = 0 \\
&\Longrightarrow x = \pm 1 \\
\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = 0 &\Longrightarrow -6y^2 = 0 \\
&\Longrightarrow y = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto los puntos críticos son $(1,0)$ y $(-1,0)$. Ambos están en $\mathcal{K}$.

La matriz hessiana $H(x,y)$ es

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6x & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Para clasificar $(1,0)$: $H(1,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$. Es diagonalizable y tiene valores propios negativos, por lo tanto es definida negativa. Eso implica que $(1,0)$ es máximo relativo.

Para clasificar $(-1,0)$: $H(-1,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$. Es diagonalizable y tiene valores propios con signos distintos. Eso implica que $(-1,0)$ es punto silla.

Distribución puntaje:

- Encuentra correctamente los puntos críticos (10 pts.)
- Calcula la matriz hessiana. (08 pts.)
- Evalúa la matriz hessiana en cada punto crítico. (04 pts.)
- Concluye correctamente en cada caso. (08 pts.)

(b) **Respuesta:** Vamos a encontrar los candidatos a puntos extremos en la frontera de $\mathcal{K}$ usando Lagrange.

Si anotamos $\eta(x,y) = (x-1)^2 + y^2 - 9$, la restricción de la frontera se escribe como $\eta(x,y) = 0$ y las ecuaciones de lagrange son

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) &= \lambda \frac{\partial \eta}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) &= \lambda \frac{\partial \eta}{\partial y}(x,y) \\ \eta(x,y) &= 0, \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} 3(1-x^2) &= 2\lambda(x-1) && \text{(1ra)} \\ -6y &= 2\lambda y && \text{(2da)} \\ (x-1)^2 + y^2 &= 9. && \text{(3ra)} \end{aligned}$$

Analizamos la 2da ecuación

$$\begin{aligned} -6y = 2\lambda y &\Longrightarrow 3y = -\lambda y \\ &\Longrightarrow (3+\lambda)y = 0. \end{aligned}$$

Acá hay solamente dos posibilidades:

- Posibilidad 1: $y = 0$. Reemplazamos en la 3ra ecuación

  $$\begin{aligned} (x-1)^2 + 0^2 = 9 &\Longrightarrow x - 1 = \pm 3 \\ &\Longrightarrow x = -2 \text{ o } x = 4 \end{aligned}$$

  Esto nos da los puntos $(-2,0)$ y $(4,0)$.
- Posibilidad 2: $\lambda = -3$. Reemplazamos en la 1ra ecuación

  $$\begin{aligned} 3(1-x^2) = 2\cdot(-3)(x-1) &\Longrightarrow x^2 - 1 = 2x - 2 \\ &\Longrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \\ &\Longrightarrow (x-1)^2 = 0 \Longrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

  Al reemplazar $x = 1$ en la 3ra ecuación, da $y = \pm 3$. Esto nos da los puntos $(1,3)$ y $(1,-3)$.

El método de Lagrange nos da 4 puntos: $(-2,0)$, $(4,0)$, $(1,3)$ y $(1,-3)$; le agregamos los puntos críticos: $(1,0)$ y $(-1,0)$, y analizamos φ en cada uno de ellos.

$\varphi(-2,0) = 2$, $\varphi(4,0) = -52$, $\varphi(1,3) = -25$, $\varphi(1,-3) = -25$, $\varphi(1,0) = 2$ y $\varphi(-1,0) = -2$. Por lo tanto el valor máximo de la función en $\mathcal{K}$ es 2, y se alcanza en $(-2,0)$ y $(1,0)$, y el valor mínimo es -52 que se alcanza en el punto frontera $(4,0)$.

Distribución puntaje:

- Plantea las ecuaciones de Lagrange, incluyendo la restricción (obtiene 1ra, 2da y 3ra). (12 pts.)
- Resuelve analizando todos los casos. (08 pts.)
- Evalúa en φ los puntos del método de Lagrange junto con los puntos críticos del interior. (06 pts.)
- Concluye. (04 pts.)