PREGUNTA 3

(a) (25 pts.) Considere la región $\mathcal{R}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, x<0, y>0\right\}$. Calcule

$$\iint_{\mathcal{R}_1} \frac{4x^3y}{3}\, dA.$$

[Indicación: Puede ser conveniente utilizar coordenadas polares.]

(b) Considere la integral iterada

$$I = \int_0^{8\sqrt{\pi}} \left(\int_{x/8}^{\sqrt{\pi}} \cos^2\left(y^2\right)\, dy \right) dx$$

i. (10 pts.) Identifique una función continua $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y una región $\mathcal{R}_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ de modo que $I = \iint_{\mathcal{R}_2} \psi(x,y)\, dA$. Esboce la región $\mathcal{R}_2$.

ii. (25 pts.) Calcule el valor de I.
[Indicación: Cambie el orden de integración en I.]

PAUTA PREGUNTA 3

(a) **Respuesta:** Siguiendo la indicación, usamos coordenadas polares

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\,\mathrm{sen}(\theta).$$

La región $\mathcal{R}_1$ queda descrita usando $r \in [1,2]$ y $\theta \in [\pi/2, \pi]$ (porque los valores de (x,y) están en el segundo cuadrante). Además, el valor absoluto del determinante del cambio de variables es

$$\left|\det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}\right| = |r| = r$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{R}_1} \frac{4x^3y}{3}\, dA &= \int_{\pi/2}^{\pi}\int_1^2 \frac{4r^3\cos^3(\theta)\cdot r\,\mathrm{sen}(\theta)}{3}\cdot r\, dr d\theta \\
&= \frac{4}{3}\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\int_1^2 r^5\cos^3(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)\, dr\right) d\theta \\
&= \frac{4}{3}\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\cos^3(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)\int_1^2 r^5\, dr\right) d\theta \\
&= \frac{4}{3}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos^3(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)\left(\left.\frac{r^6}{6}\right|_1^2\right) d\theta \\
&= \frac{4}{3}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos^3(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)\left(\frac{64}{6}-\frac{1}{6}\right) d\theta \\
&= \frac{4}{3}\cdot\frac{63}{6}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos^3(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)\, d\theta
\end{aligned}$$

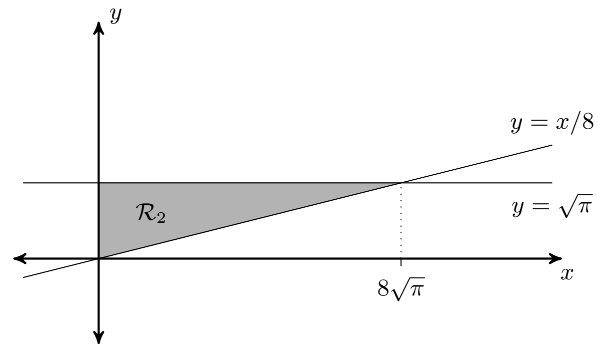
$$\begin{aligned} u &= \cos(\theta) \\ du &= -\mathrm{sen}(\theta)\, d\theta \end{aligned} \qquad = -14\int_0^{-1} u^3\, du = -14\left.\frac{u^4}{4}\right|_0^{-1} = -\frac{14}{4} = -\frac{7}{2}.$$

Distribución puntaje:

- Establece correctamente la región en coordenadas polares (08 pts.)
- Plantea correctamente la integral sin olvidar el determinante (r en este caso) (10 pts.)
- Desarrolla correctamente la integral c/respecto a r (02 pts.)
- Resuelve la integral trigonométrica (05 pts.)

(b) **Respuesta:**

I. La función es $\psi(x,y) = \cos^2(y^2)$, que es continua en todo $\mathbb{R}^2$.
Para la región $\mathcal{R}_2$: Notamos que $x \in [0, 8\sqrt{\pi}]$, y que y está entre $y = x/8$ e $y = \sqrt{\pi}$.



Distribución puntaje:

- Identifica la función y su continuidad (02 pts.)
- A partir de los datos de la integral, establece los límites de la región $\mathcal{R}_2$ (04 pts.)
- Esboza la región $\mathcal{R}_2$ correctamente (04 pts.)

II. Seguimos la indicación y cambiamos el orden de integración en I.
Notamos que para $y \in [0, \sqrt{\pi}]$, el valor de x se mueve entre $x = 0$ y $x = 8y$ (pues la recta es $y = x/8$). Por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{8y} \cos^2(y^2)\, dx \right) dy \\
&= \int_0^{\sqrt{\pi}} \left(\cos^2(y^2) \int_0^{8y} dx \right) dy \\
&= \int_0^{\sqrt{\pi}} 8y \cos^2(y^2)\, dy \\
\begin{array}{rcl} u &=& y^2 \\ du &=& 2y\,dy \end{array} \qquad &= \int_0^{\pi} 4\cos^2(u)\, du \\
&= \int_0^{\pi} 2 + 2\cos(2u)\, du = 2u + \operatorname{sen}(2u) \Big|_0^{\pi} = 2\pi.
\end{aligned}$$

Distribución puntaje:

- Cambia correctamente el orden de integración (10 pts.)
- Desarrolla y sustituye correctamente (incluyendo los límites de integración) (06 pts.)
- Utiliza identidades trigonométricas adecuadas (06 pts.)
- Concluye (03 pts.)