Auxiliar Extra 2: Preparación Control 3

Profesor: Alexander Frank M.
Auxiliar: Maximiliano S. Lioi

P1 **[Planos Tangentes]** Considere la superficie S en $\mathbb{R}^4$ dada por:

$$(t+z^2)\cos\big(x^2+y^2\big) = 2 \tag{1}$$

Encuentre el plano tangente en el punto $(0,0,1,1)$.

P2 **[Teorema de Taylor]** Considere $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = e^{x^2-y^2}$$

Calcule el polinomio de Taylor de segundo orden para f centrado en el origen $(0,0)$.

P3 **[Optimización con restricciones]** Resuelva el problema de optimización no lineal con restricciones

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}) \quad \min_{x,y,z} \quad & x^2 - y^2 \\ \text{s.t.} \quad & x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1 \end{aligned} \tag{2}$$

P4 **[Integración]** Calcule las siguientes integrales múltiples

$$(a) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-1}^{1} x\sin(y) - ye^x dxdy \qquad (b) \quad \int_0^1 \int_y^1 (x-y)\sin\big(x^3\big)dxdy \qquad (c) \quad \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_{x^2}^{\pi} \frac{\sin(y)}{\sqrt{y}} dydx$$

P5 **[Teorema del Cambio de Variable]** Considere $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ junto a la región $\mathcal{R} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \geq R,\ x^2+y^2 \leq R^2\}$ donde $R > 0$. Calcule la integral

$$\int_{\mathcal{R}} f(x,y)dA$$

P6 **[Aplicaciones: Cálculo de Masas]** Considere un cuerpo de masa M definido por la región

$$\mathcal{R} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4x\}$$

y considere la función de densidad de masa

$$\rho(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

Encuentre la masa M del cuerpo que viene dada por la integral

$$M = \int\int_{\mathcal{R}} \rho(x,y)dA$$

Resumen

Definición 1 (Hipersuperficie tangente) *Sea S una hipersuperficie suave determinada por una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Sea también $x_0 \in S$. Definimos el hiperplano tangente a S en x_0 como el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^n$ tales que*

$$\langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle = 0$$

Corolario 1 *Supongamos que $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^2 en A, y sean $x_0 \in A, h \in \mathbb{R}^n$ pequeño. Entonces, el polinomio de Taylor de orden dos para f en torno a x_0, denotado $P_2(x_0, h)$ viene dado, explícitamente, por la expresión*

$$f(x_0) + \nabla f(x_0) h + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j,$$

Equivalentemente, se puede escribir

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0)^T h + \frac{1}{2} h^T H f(x_0) h$$

o bien, escogiendo $h = x - x_0$ tenemos $f(x) \approx$

$$f(x_0) + \nabla f(x_0)^T (x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T H f(x_0)(x - x_0)$$

para x cerca de x_0.

Definición 2 *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sea $\bar{x} \in U$. Decimos que $\bar{x}$ es punto crítico si f es diferenciable en $\bar{x}$ y $\nabla f(\bar{x}) = 0$*

Teorema 1 (Condición Necesaria) *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función de clase $C^2(U)$ y $\bar{x} \in U$. Se tiene que:*

- *(i) $\bar{x}$ es mín. local $\Longrightarrow Hf(\bar{x})$ es semidef. positiva.*
- *(ii) $\bar{x}$ es máx. local $\Longrightarrow Hf(\bar{x})$ es semidef. negativa.*

Teorema 2 (Condición Suficiente) *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función de clase $C^2(U)$ y $\bar{x} \in U$ punto crítico de f. Se tiene que:*

- *(i) $Hf(\bar{x})$ es def. positiva $\Longrightarrow \bar{x}$ es mín. local.*
- *(ii) $Hf(\bar{x})$ es def. negativa $\Longrightarrow \bar{x}$ es máx. local.*

Teorema 3 (Teorema de Multiplicadores de Lagrange) *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funciones de clase C^1. Sea S el conjunto de restricciones definidas por g como $S := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$. Supongamos que x^* es mínimo o máximo local para f en S y que $\{g_1(x_0), \cdots, g_m(x_0)\}$ son l.i, entonces existe $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tal que $D_x f(x^*) = \lambda^{*T} Dg(x^*)$*

Observación Definamos el *Lagrangeano* $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda \cdot g(x)$, bajo las hipótesis anteriores, se puede escribir equivalentemente con $(x^*, \lambda^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tal que $D_{x,\lambda}\mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = 0$

Teorema 4 (Condición de integrabilidad) *Sea $f : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función escalar acotada, con $\mathcal{R}$ un rectángulo en $\mathbb{R}^n$. Entonces f es Riemann-integrable en $\mathcal{R}$ sí y sólamente sí el conjunto de discontinuidades de f tiene medida cero. En particular, toda función continua en $\mathcal{R}$ es integrable.*

Teorema 5 (Teorema de Fubini) *Sea $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{R}_2 \subseteq \mathbb{R}^p$ dos rectángulos cerrados y sea $f : \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$ una función continua. Entonces se tienen las igualdades*

$$\int_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2} f = \int_{\mathcal{R}_1} \left(\int_{\mathcal{R}_2} f(x, y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{\mathcal{R}_2} \left(\int_{\mathcal{R}_1} f(x, y) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Teorema 6 (Teorema del Cambio de Variables) *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado. Sea $T : U \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 en U e inyectiva sobre U. Si $f : T(U) \to \mathbb{R}$ es integrable sobre $T(U)$, entonces*

$$\int_{T(U)} f(y) \mathrm{d}y = \int_U (f \circ T)(x) |\det DT(x)| \mathrm{d}x$$

Proposición 1 (Coordenadas polares) *Para $\rho \geq 0$ y $\theta \in [0, 2\pi)$ y $\varphi \in [0, \pi]$, consideramos: $\theta \in [0, 2\pi)$, consideramos:*

$$T(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \operatorname{sen}(\theta))$$

Entonces

$$|\det(DT(\rho, \theta))| = \rho$$