

Auxiliar 11: Optimización e Integración

Profesor: Alexander Frank M.
 Auxiliar: Maximiliano S. Lioi

P1 [Optimización irrestricta] Considere la función definida por $f(x, y) = 3x^3 + y^2 - 9x - 6y + 1$

- (i) Encuentre los puntos críticos de $f(x, y)$.
- (ii) Determine la naturaleza de dichos puntos estudiando la matriz Hessiana de f .

P2 [Optimización con restricciones] Resuelva el problema de optimización

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}) \quad & \min_{x, y, z} \quad x + 3y - 2z \\ & \text{s.t.} \quad \|(x, y, z)\|_2^2 = 1 \end{aligned} \tag{1}$$

P3 [Integración] Considere el dominio $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$. Calcule la integral

$$\int_D f(x, y) dA$$

donde $f(x, y) = x^2 + y^2$.

P4 [Teorema de Fubini] Calcule las integrales

$$(a) \quad \int_0^1 \int_z^1 \int_y^1 e^{x^3} dx dy dz, \quad (b) \quad \int_0^2 \arctan(\pi x) - \arctan(x) dx$$

Hint: Recuerde para (b) que $\arctan(z) = \int \frac{1}{z^2+1} dz$.

P5 [Teorema del Cambio de Variable] Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \tag{2}$$

Ind: Considere I la integral descrita en (2) y estudie el valor de I^2 , puede ser útil usar coordenadas polares.

P6 [Propuesto] Utilizando coordenadas polares, calcular las integrales:

- (a) $\int_D \sin(x^2 + y^2) dx dy, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$
- (b) $\int_D |x + y| dx dy, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$
- (c) $\int_D (x^2 + y^2)^{-3} dx dy, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$

Resumen

Definición 1 (Matriz Hessiana) Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ función de clase $C^2(U)$. Llamamos matriz Hessiana de f en x a la matriz $D(\nabla f)(x)^T$, que denotamos:

$$D^2 f(x) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{bmatrix}$$

otras formas comunes para denotar la matriz Hessiana son $Hf(x)$ o bien $f''(x)$.

Proposición 1 Para $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ función de clase $C^2(U)$ y $\bar{x} \in U$, $D^2 f(\bar{x})$ es simétrica, y por lo tanto sus valores propios son reales.

Definición 2 (Punto extremo) Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $\bar{x} \in U$. Decimos que $\bar{x}$ es:

- (i) *Mínimo local* si $\exists \varepsilon > 0 : f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in U \cap B(\bar{x}, \varepsilon)$
- (ii) *Máximo local* si $\exists \varepsilon > 0 : f(\bar{x}) \geq f(x) \quad \forall x \in U \cap B(\bar{x}, \varepsilon)$
- (iii) *Mínimo global* si $f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in U$
- (iv) *Máximo global* si $f(\bar{x}) \geq f(x) \quad \forall x \in U$

Si se cumple alguna de las definiciones anteriores, decimos que $\bar{x}$ es punto extremo.

Teorema 1 (Fermat) Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $\bar{x} \in U$ punto extremo de f . Si f es diferenciable en $\bar{x}$, entonces $\nabla f(\bar{x}) = 0$

Definición 3 Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $\bar{x} \in U$. Decimos que $\bar{x}$ es punto crítico si f es diferenciable en $\bar{x}$ y $\nabla f(\bar{x}) = 0$

Teorema 2 (Condición Necesaria) Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ función de clase $C^2(U)$ y $\bar{x} \in U$. Se tiene que:

- (i) $\bar{x}$ es mín. local $\implies Hf(\bar{x})$ es semidef. positiva.
- (ii) $\bar{x}$ es máx. local $\implies Hf(\bar{x})$ es semidef. negativa.

Teorema 3 (Condición Suficiente) Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ función de clase $C^2(U)$ y $\bar{x} \in U$ punto crítico de f . Se tiene que:

(i) $Hf(\bar{x})$ es def. positiva $\implies \bar{x}$ es mín. local.

(ii) $Hf(\bar{x})$ es def. negativa $\implies \bar{x}$ es máx. local.

Teorema 4 (Teorema de Multiplicadores de Lagrange) Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ funciones de clase C^1 . Sea S el conjunto de restricciones definidas por g como $S := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$. Supongamos que x^* es mínimo o máximo local para f en S y que $\{g_1(x_0), \dots, g_m(x_0)\}$ son l.i, entonces existe $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tal que $D_x f(x^*) = \lambda^{*T} Dg(x^*)$

Observación Definamos el Lagrangeano $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda \cdot g(x)$, bajo las hipótesis anteriores, se puede escribir equivalentemente con $(x^*, \lambda^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tal que $D_{x, \lambda} \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = 0$

Teorema 5 (Condición de integrabilidad) Sea $f : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar acotada, con $\mathcal{R}$ un rectángulo en $\mathbb{R}^n$. Entonces f es Riemann-integrable en $\mathcal{R}$ si y sólo si el conjunto de discontinuidades de f tiene medida cero. En particular, toda función continua en $\mathcal{R}$ es integrable.

Teorema 6 (Teorema de Fubini) Sea $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{R}_2 \subseteq \mathbb{R}^p$ dos rectángulos cerrados y sea $f : \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces se tienen las igualdades

$$\int_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2} f = \int_{\mathcal{R}_1} \left(\int_{\mathcal{R}_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathcal{R}_2} \left(\int_{\mathcal{R}_1} f(x, y) dx \right) dy$$

Teorema 7 (Teorema del Cambio de Variables) Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado. Sea $T : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 en U e inyectiva sobre U . Si $f : T(U) \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable sobre $T(U)$, entonces

$$\int_{T(U)} f(y) dy = \int_U (f \circ T)(x) |\det DT(x)| dx$$

Proposición 2 (Coordenadas polares) Para $\rho \geq 0$ y $\theta \in [0, 2\pi)$ y $\varphi \in [0, \pi]$, consideramos: $\theta \in [0, 2\pi)$, consideramos:

$$T(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$$

Entonces

$$|\det(DT(\rho, \theta))| = \rho$$