Auxiliar Extra 2: Preparación Control 3

Profesor: Alexander Frank M.
Auxiliar: Maximiliano S. Lioi

P1 **[Planos Tangentes]** Considere la superficie S en $\mathbb{R}^4$ dada por:

$$(t+z^2)\cos\big(x^2+y^2\big) = 2 \tag{1}$$

Encuentre el plano tangente en el punto $(0,0,1,1)$.

P2 **[Teorema de Taylor]** Considere $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = e^{x^2-y^2}$$

Calcule el polinomio de Taylor de segundo orden para f centrado en el origen $(0,0)$.

P3 **[Optimización con restricciones]** Resuelva el problema de optimización no lineal con restricciones

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}) \quad \min_{x,y,z} \quad & x^2 - y^2 \\ \text{s.t.} \quad & x^2+2y^2+3z^2 = 1 \end{aligned} \tag{2}$$

P4 **[Integración]** Calcule las siguientes integrales múltiples

$$(a) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{-1}^{1} x\sin(y) - ye^x\,dxdy \qquad (b) \quad \int_0^1\int_y^1 (x-y)\sin\big(x^3\big)dxdy \qquad (c) \quad \int_0^{\sqrt{\pi}}\int_{x^2}^{\pi}\frac{\sin(y)}{\sqrt{y}}dydx$$

P5 **[Teorema del Cambio de Variable]** Considere $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=\frac{x+y}{x^2+y^2}$ junto a la región $\mathcal{R} := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y\geq R,\ x^2+y^2\leq R^2\}$ donde $R>0$. Calcule la integral

$$\int_{\mathcal{R}} f(x,y)dA$$

P6 **[Aplicaciones: Cálculo de Masas]** Considere un cuerpo de masa M definido por la región

$$\mathcal{R} := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2x\leq x^2+y^2\leq 4x\}$$

y considere la función de densidad de masa

$$\rho(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

Encuentre la masa M del cuerpo que viene dada por la integral

$$M = \int\int_{\mathcal{R}} \rho(x,y)dA$$

Resumen

Definición 1 (Hipersuperficie tangente) *Sea S una hipersuperficie suave determinada por una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Sea también $x_0 \in S$. Definimos el hiperplano tangente a S en x_0 como el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^n$ tales que*

$$\langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle = 0$$

Corolario 1 *Supongamos que $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^2 en A, y sean $x_0 \in A, h \in \mathbb{R}^n$ pequeño. Entonces, el polinomio de Taylor de orden dos para f en torno a x_0, denotado $P_2(x_0, h)$ viene dado, explícitamente, por la expresión*

$$f(x_0) + \nabla f(x_0) h + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j,$$

Equivalentemente, se puede escribir

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0)^T h + \frac{1}{2} h^T H f(x_0) h$$

o bien, escogiendo $h = x - x_0$ tenemos $f(x) \approx$

$$f(x_0) + \nabla f(x_0)^T (x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T H f(x_0)(x - x_0)$$

para x cerca de x_0.

Definición 2 *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sea $\bar{x} \in U$. Decimos que $\bar{x}$ es punto crítico si f es diferenciable en $\bar{x}$ y $\nabla f(\bar{x}) = 0$*

Teorema 1 (Condición Necesaria) *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función de clase $C^2(U)$ y $\bar{x} \in U$. Se tiene que:*

(i) $\bar{x}$ es mín. local $\Longrightarrow$ $Hf(\bar{x})$ es semidef. positiva.

(ii) $\bar{x}$ es máx. local $\Longrightarrow$ $Hf(\bar{x})$ es semidef. negativa.

Teorema 2 (Condición Suficiente) *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función de clase $C^2(U)$ y $\bar{x} \in U$ punto crítico de f. Se tiene que:*

(i) $Hf(\bar{x})$ es def. positiva $\Longrightarrow$ $\bar{x}$ es mín. local.

(ii) $Hf(\bar{x})$ es def. negativa $\Longrightarrow$ $\bar{x}$ es máx. local.

Teorema 3 (Teorema de Multiplicadores de Lagrange) *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funciones de clase C^1. Sea S el conjunto de restricciones definidas por g como $S := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$. Supongamos que x^* es mínimo o máximo local para f en S y que $\{g_1(x_0), \cdots, g_m(x_0)\}$ son l.i, entonces existe $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tal que $D_x f(x^*) = \lambda^{*T} Dg(x^*)$*

Observación Definamos el *Lagrangeano* $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda \cdot g(x)$, bajo las hipótesis anteriores, se puede escribir equivalentemente con $(x^*, \lambda^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tal que $D_{x,\lambda}\mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = 0$

Teorema 4 (Condición de integrabilidad) *Sea $f : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función escalar acotada, con $\mathcal{R}$ un rectángulo en $\mathbb{R}^n$. Entonces f es Riemann-integrable en $\mathcal{R}$ sí y sólamente sí el conjunto de discontinuidades de f tiene medida cero. En particular, toda función continua en $\mathcal{R}$ es integrable.*

Teorema 5 (Teorema de Fubini) *Sea $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{R}_2 \subseteq \mathbb{R}^p$ dos rectángulos cerrados y sea $f : \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$ una función continua. Entonces se tienen las igualdades*

$$\int_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2} f = \int_{\mathcal{R}_1} (\int_{\mathcal{R}_2} f(x, y) \mathrm{d}y) \mathrm{d}x = \int_{\mathcal{R}_2} (\int_{\mathcal{R}_1} f(x, y) \mathrm{d}x) \mathrm{d}y$$

Teorema 6 (Teorema del Cambio de Variables) *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado. Sea $T : U \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 en U e inyectiva sobre U. Si $f : T(U) \to \mathbb{R}$ es integrable sobre $T(U)$, entonces*

$$\int_{T(U)} f(y) \mathrm{d}y = \int_U (f \circ T)(x) |\det DT(x)| \mathrm{d}x$$

Proposición 1 (Coordenadas polares) *Para $\rho \geq 0$ y $\theta \in [0, 2\pi)$ y $\varphi \in [0, \pi]$, consideramos: $\theta \in [0, 2\pi)$, consideramos:*

$$T(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \operatorname{sen}(\theta))$$

Entonces

$$|\det(DT(\rho, \theta))| = \rho$$

P1 **[Planos Tangentes]** Considere la superficie S en $\mathbb{R}^4$ dada por:

$$(t+z^2)\cos(x^2+y^2)=2 \tag{1}$$

Encuentre el plano tangente en el punto $(0,0,1,1)$.

Dem: Consideremos S como la hipersuperficie generada por

$$g(x,y,z,t)=(t+z^2)\cos(x^2+y^2)-2=0$$

Por lo que calculamos $\nabla g(0,0,1,1)$, tenemos

$$\nabla g(x,y,z,t)=\begin{pmatrix} -2x(t+z^2)\operatorname{sen}(x^2+y^2) \\ -2y(t+z^2)\operatorname{sen}(x^2+y^2) \\ 2z\cos(x^2+y^2) \\ \cos(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla g(0,0,1,1)=\begin{pmatrix} 0\\0\\2\\1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, el plano tangente en $(0,0,1,1)$ viene dado por los $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ tal que

$$\left\langle \nabla g(0,0,1,1), \begin{pmatrix} x\\y\\z-1\\t-1 \end{pmatrix}\right\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 0\\0\\2\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x\\y\\z-1\\t-1 \end{pmatrix}\right\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{2z+t=3}$$

P2 **[Teorema de Taylor]** Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$$

Calcule el polinomio de Taylor de segundo orden para f centrado en el origen $(0, 0)$.

Dem: El Polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $(0,0)$ viene dado por

$$P_2 f_{(0,0)}(x,y) = f(0,0) + \langle \nabla f(0,0), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T Hf(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1)$$

Calculamos $\nabla f(0,0)$ y $Hf(0,0)$, para ello

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x e^{x^2-y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y e^{x^2-y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4xy e^{x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x} = 2e^{x^2-y^2} + 4x^2 e^{x^2-y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y} = -2e^{x^2-y^2} + 4y^2 e^{x^2-y^2}$$

Por lo tanto,

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Además, $f(0,0) = 1$, luego, reemplazando en (1)

$$P_2 f_{(0,0)}(x,y) = 1 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Finalmente, el Polinomio de Taylor de orden 2 de f en $(0,0)$

$$P_2 f_{(0,0)}(x,y) = 1 + x^2 + y^2$$

P3 **[Optimización con restricciones]** Resuelva el problema de optimización no lineal con restricciones

$$(\mathcal{P}) \quad \min_{x,y,z} \; x^2 - y^2 \quad \text{s.t.} \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1 \tag{2}$$

Dem: Escribimos $(\mathcal{P})$ de la forma

$$\begin{cases} \min\limits_{x} & f(x) \\ \text{s.t} & g(x) = 0 \end{cases}$$

Definimos $f(x,y,z) = x^2 - y^2$, $g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1$

Vemos que f, g son C^1 y $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \\ 6z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ luego no se anula en el conjunto factible.

Por Teo. de Lagrange, si (x^*, y^*, z^*) es mínimo, existe $\lambda^* \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(x^*, y^*, z^*) = \lambda^* \nabla g(x^*, y^*, z^*)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 2x^* \\ -2y^* \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda^* x^* \\ 4\lambda^* y^* \\ 6\lambda^* z^* \end{pmatrix} \right.$$

Tenemos distintos si $\lambda = 0$ o $\lambda \neq 0$

Caso $\lambda = 0$: Tenemos que $x^* = 0 \wedge y^* = 0$, luego como $(x^*, y^*, z^*) \in S \Rightarrow z^* = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

Tenemos candidatos a mínimo

$$\underline{\left(0, 0, +\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}, \quad \underline{\left(0, 0, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

Caso $\lambda \neq 0$: Tenemos $z^* = 0$ y $\begin{cases} 2x^* = 2\lambda^* x \\ -2y^* = 4\lambda^* y^* \end{cases}$

Entonces tenemos dos posible casos para que esto sucede,

(i) $\boxed{\lambda^* = 1 \wedge y^* = 0}$ (ii) $\boxed{\lambda^* = -1/2 \wedge x^* = 0}$

En (i) usando $(x^*, y^*, z^*) \in S \Rightarrow x^* = \pm 1$, lo que nos de los candidatos a mínimo

$$(1,0,0), (-1,0,0)$$

En (ii) usando $(x^*, y^*, z^*) \in S \Rightarrow y^* = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, lo que nos de los candidatos a mínimo

$$\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

Tenemos los candidatos a mínimo

$$\left(0, 0, +\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(0, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$(1,0,0), (-1,0,0)$$

Por inspección vemos que $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ y $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ son mínimos del problema.

P4 **[Integración]** Calcule las siguientes integrales múltiples

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{-1}^{1} x\sin(y) - ye^x dxdy$ (b) $\displaystyle\int_0^1\int_y^1 (x-y)\sin(x^3)dxdy$ (c) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}}\int_{x^2}^{\pi} \frac{\sin(y)}{\sqrt{y}}dydx$

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_{-1}^{1} x\sin y - ye^x \, dx\, dy$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_{-1}^{1} x\sin y \, dx dy - \int_0^{\pi/2}\int_{-1}^{1} y e^x \, dx dy$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin y \underbrace{\cancel{\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1}}}_{0} dy - \int_0^{\pi/2} y \, (e^x)\Big|_{-1}^{1} dy$$

$$= -\int_0^{\pi/2} y(e - e^{-1}) dy = (e^{-1} - e)\left(y^2/2\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \boxed{(e^{-1} - e)\frac{\pi^2}{8}}$$

(b) $\displaystyle\int_0^1\int_y^1 (x-y)\sin(x^3)\, dx\, dy$

$$= \underbrace{\int_0^1\int_y^1 x\sin(x^3)dx\, dy}_{I_1} - \underbrace{\int_0^1\int_y^1 y\sin(x^3)\, dx\, dy}_{I_2}$$

Estudiamos la región de integración donde y es fijo

$\rightarrow$ $0 \leq y \leq 1 \quad , \quad y \leq x \leq 1$

Fijando ahora x, Tenemos que la región se escribe

$$\rightarrow \quad \underline{0 \leq x \leq 1 \quad , \quad 0 \leq y \leq x}$$

Aplicando Fubini en

$$\int_0^1 \int_0^x x \sin(x^3)\, dy\, dx - \int_0^1 \int_0^x y \sin(x^3)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 x^2 \sin(x^3)\, dx - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \sin(x^3)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \sin(x^3)\, dx$$

Haciendo C.V $u = x^3 \Rightarrow \frac{du}{3x^2} = dx$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \sin(x^3)\, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \cancel{x^2} \sin(u) \frac{du}{3\cancel{x^2}}$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^1 \sin u\, du = \frac{1}{6} \left(-\cos(u)\Big|_0^1\right)$$

$$\boxed{= \frac{1}{6}\left(1 - \cos(1)\right)}$$

(c) $$\int_0^{\sqrt{\pi}}\int_{x^2}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} y}{\sqrt{y}}\, dy\, dx$$

Estudiamos la región de integración donde x es fijo

$$\rightarrow \quad 0 \leq x \leq \pi \,, \quad x^2 \leq y \leq \pi$$

Reescribimos fijando y $\quad x \leq \sqrt{y}$

$$\rightarrow \quad 0 \leq y \leq \pi \,, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{y}$$

luego, aplicando Fubini,

$$\int_0^{\sqrt{\pi}}\int_{x^2}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} y}{\sqrt{y}}\, dy\, dx = \int_0^{\pi}\int_0^{\sqrt{y}} \frac{\operatorname{sen} y}{\sqrt{y}}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^{\pi} \operatorname{sen} y\, dy = 2$$

P5 **[Teorema del Cambio de Variable]** Considere $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ junto a la región $\mathcal{R} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \geq R,\ x^2+y^2 \leq R^2\}$ donde $R > 0$. Calcule la integral

$$\int_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dA$$

Dem. Notemos que como $R>0 \Rightarrow x \geq 0 \wedge y \geq 0$

Haciendo coordenadas polares, $T(r,\theta) = (r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta)$ y $\det|DT(r,\theta)| = r$.

Escribimos la región en polares, puesto que $x \geq 0$, $y \geq 0$ tenemos $\theta \in [0, \pi/2]$.

Además, $x^2+y^2 \leq R^2 \Rightarrow r \leq R$

Por último la restricción $x+y \geq R \iff r(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) \geq R$

$$\iff r \geq \frac{R}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta} \quad \forall \theta \in [0, \pi/2]$$

Luego la región R se escribe en Polares como

$$R^P = \left\{ (r,\theta) : \frac{R}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta} \leq r \leq R \ , \ \theta \in [0, \pi/2] \right\}$$

Entonces por Teo. del Cambio de Variables

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \int_0^{\pi/2} \int_{\frac{R}{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}}^{R} (f \circ T)(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_{\frac{R}{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}}^{R} \frac{\cancel{r}(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)}{\cancel{r^2}} \cancel{r}\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(R - \frac{R}{(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)}\right)(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\, dr\, d\theta$$

$$= R\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)$$

Concluimos,

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\, dA = R\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)}$$

P6 **[Aplicaciones: Cálculo de Masas]** Considere un cuerpo de masa M definido por la región

$$\mathcal{R} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4x\}$$

y considere la función de densidad de masa

$$\rho(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

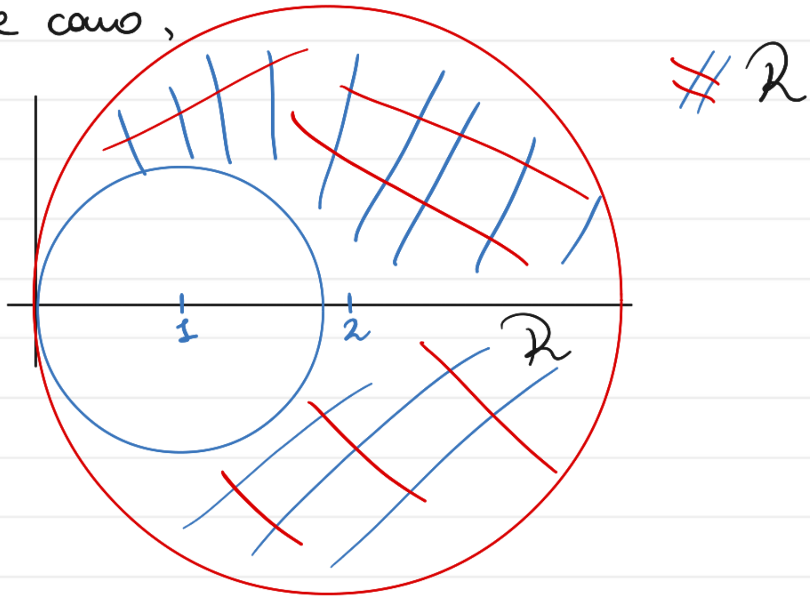
Encuentre la masa M del cuerpo que viene dada por la integral

$$M = \int\int_{\mathcal{R}} \rho(x,y)dA$$

Dem: Notemos que $2x \leq x^2+y^2 \iff 1 \leq \underbrace{(x-1)^2 + y^2}_{\text{Circunferencia en } (1,0) \text{ con } r=1}$

$$x^2+y^2 \leq 4x \iff \underbrace{(x-2)^2 + y^2}_{\text{Circunferencia en } (2,0) \text{ con } r=2} \leq 4$$

Luego $\mathcal{R}$ se ve como,



Escribiendo la región en Polares, vemos $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, y

$$2x \leq x^2+y^2 \leq 4x$$

$$\iff 2r\cos\theta \leq r^2 \leq 4r\cos\theta$$

$$\iff \underline{2\cos\theta \leq r \leq 4\cos\theta}$$

Tenemos entonces por Teo. del Cambio de Variable

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} \frac{r\,\text{sen}\theta}{r^2}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} \text{sen}\theta\; dr\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (4\cos\theta - 2\cos\theta)\,\text{sen}\theta\, d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\,\text{sen}\theta\cos\theta\, d\theta = \text{Sen}^2(\theta)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0$$