Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2001-2 – Cálculo en Varias Variables

Auxiliar 11: Optimización e Integración

Profesor: Alexander Frank M.
Auxiliar: Maximiliano S. Lioi

P1 **[Optimización irrestricta]** Considere la función definida por $f(x,y) = 3x^3+y^2-9x-6y+1$

(i) Encuentre los puntos críticos de $f(x,y)$.

(ii) Determine la naturaleza de dichos puntos estudiando la matriz Hessiana de f.

P2 **[Optimización con restricciones]** Resuelva el problema de optimización

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}) \quad & \min_{x,y,z} \quad x+3y-2z \\ & \text{s.t.} \quad \|(x,y,z)\|_2^2 = 1 \end{aligned} \tag{1}$$

P3 **[Integración]** Considere el dominio $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$. Calcule la integral

$$\int_D f(x,y)\mathrm{d}A$$

donde $f(x,y) = x^2+y^2$.

P4 **[Teorema de Fubini]** Calcule las integrales

$$(a) \quad \int_0^1 \int_z^1 \int_y^1 e^{x^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \qquad (b) \quad \int_0^2 \arctan(\pi x) - \arctan(x)\mathrm{d}x$$

Hint: Recuerde para (b) que $\arctan(z) = \int \frac{1}{z^2+1}\mathrm{d}z$.

P5 **[Teorema del Cambio de Variable]** Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \tag{2}$$

Ind: Considere I la integral descrita en (2) y estudie el valor de I^2, puede ser útil usar coordenadas polares.

P6 **[Propuesto]** Utilizando coordenadas polares, calcular las integrales:

(a) $\int_D \sin\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leq 1\right\}$

(b) $\int_D |x+y|\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leq 1\right\}$

(c) $\int_D \left(x^2+y^2\right)^{-3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\right\}$

Resumen

Definición 1 (Matriz Hessiana) *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función de clase $C^2(U)$. Llamamos matriz Hessiana de f en x a la matriz $D(\nabla f)(x)^T$, que denotamos:*

$$D^2 f(x) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{bmatrix}$$

otras formas comunes para denotar la matriz Hessiana son $Hf(x)$ o bien $f''(x)$.

Proposición 1 *Para $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función de clase $C^2(U)$ y $\bar{x} \in U, D^2 f(\bar{x})$ es simétrica, y por lo tanto sus valores propios son reales.*

Definición 2 (Punto extremo) *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sea $\bar{x} \in U$. Decimos que $\bar{x}$ es:*

(i) Mínimo local si $\exists \varepsilon > 0 : f(\bar{x}) \leq f(x)$ $\forall x \in U \cap B(\bar{x}, \varepsilon)$

(ii) Máximo local si $\exists \varepsilon > 0 : f(\bar{x}) \geq f(x)$ $\forall x \in U \cap B(\bar{x}, \varepsilon)$

(iii) Mínimo global si $f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in U$

(iv) Máximo global si $f(\bar{x}) \geq f(x) \quad \forall x \in U$

Si se cumple alguna de las definiciones anteriores, decimos que $\bar{x}$ es punto extremo.

Teorema 1 (Fermat) *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sea $\bar{x} \in U$ punto extremo de f. Si f es diferenciable en $\bar{x}$, entonces $\nabla f(\bar{x}) = 0$*

Definición 3 *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sea $\bar{x} \in U$. Decimos que $\bar{x}$ es punto crítico si f es diferenciable en $\bar{x}$ y $\nabla f(\bar{x}) = 0$*

Teorema 2 (Condición Necesaria) *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función de clase $C^2(U)$ y $\bar{x} \in U$. Se tiene que:*

(i) $\bar{x}$ es mín. local $\Longrightarrow Hf(\bar{x})$ es semidef. positiva.

(ii) $\bar{x}$ es máx. local $\Longrightarrow Hf(\bar{x})$ es semidef. negativa.

Teorema 3 (Condición Suficiente) *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función de clase $C^2(U)$ y $\bar{x} \in U$ punto crítico de f. Se tiene que:*

(i) $Hf(\bar{x})$ es def. positiva $\Longrightarrow \bar{x}$ es mín. local.

(ii) $Hf(\bar{x})$ es def. negativa $\Longrightarrow \bar{x}$ es máx. local.

Teorema 4 (Teorema de Multiplicadores de Lagrange) *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funciones de clase C^1. Sea S el conjunto de restricciones definidas por g como $S := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$. Supongamos que x^* es mínimo o máximo local para f en S y que $\{g_1(x_0), \cdots, g_m(x_0)\}$ son l.i, entonces existe $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tal que $D_x f(x^*) = \lambda^{*T} Dg(x^*)$*

Observación Definamos el *Lagrangeano* $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda \cdot g(x)$, bajo las hipótesis anteriores, se puede escribir equivalentemente con $(x^*, \lambda^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tal que $D_{x,\lambda}\mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = 0$

Teorema 5 (Condición de integrabilidad) *Sea $f : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función escalar acotada, con $\mathcal{R}$ un rectángulo en $\mathbb{R}^n$. Entonces f es Riemann-integrable en $\mathcal{R}$ sí y sólamente sí el conjunto de discontinuidades de f tiene medida cero. En particular, toda función continua en $\mathcal{R}$ es integrable.*

Teorema 6 (Teorema de Fubini) *Sea $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{R}_2 \subseteq \mathbb{R}^p$ dos rectángulos cerrados y sea $f : \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$ una función continua. Entonces se tienen las igualdades*

$$\int_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2} f = \int_{\mathcal{R}_1} (\int_{\mathcal{R}_2} f(x, y) \mathrm{d}y) \mathrm{d}x = \int_{\mathcal{R}_2} (\int_{\mathcal{R}_1} f(x, y) \mathrm{d}x) \mathrm{d}y$$

Teorema 7 (Teorema del Cambio de Variables) *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado. Sea $T : U \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 en U e inyectiva sobre U. Si $f : T(U) \to \mathbb{R}$ es integrable sobre $T(U)$, entonces*

$$\int_{T(U)} f(y) \mathrm{d}y = \int_U (f \circ T)(x) |\det DT(x)| \mathrm{d}x$$

Proposición 2 (Coordenadas polares) *Para $\rho \geq 0$ y $\theta \in [0, 2\pi)$ y $\varphi \in [0, \pi]$, consideramos: $\theta \in [0, 2\pi)$, consideramos:*

$$T(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \operatorname{sen}(\theta))$$

Entonces

$$|\det(DT(\rho, \theta))| = \rho$$

P1 **[Optimización irrestricta]** Considere la función definida por $f(x,y) = 3x^3+y^2-9x-6y+1$

(i) Encuentre los puntos críticos de $f(x,y)$.

(ii) Determine la naturaleza de dichos puntos estudiando la matriz Hessiana de f.

(i) Estudiamos los puntos (x^*,y^*) tales que $\nabla f(x^*,y^*) = 0$

Sabemos que $\nabla f(x)$ está bien definida pues f es C^∞ (es un Polinomio)

Tenemos $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 9x^2-9$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y-6$

$$\Rightarrow \nabla f(x^*,y^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (S) \begin{cases} 9x^2-9 = 0 \\ 2y-6 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Los puntos (x^*,y^*) críticos de f son $(-1,3)$ y $(1,3)$

(ii) Veamos si estos puntos son mínimos, máximos o puntos de silla, estudiamos $Hf(x^*,y^*)$ y vemos si es def. positiva / negativa o indefinida.

$$\rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 18x \quad \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$$

Luego, $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 18x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Veamos primero $(x^*,y^*) = (-1,3)$,

$$\rightarrow Hf(-1,3) = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Notemos que $Hf(-1,3) = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ tiene velores propios

$\rightarrow \lambda_1 = -18 \quad \rightarrow \lambda_2 = 2$

Por lo tanto, $(-1,3)$ es punto de sille.

Veamos $(x^*, y^*) = (1,3)$,

Notemos que $Hf(1,3) = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ tiene velores propios

$\rightarrow \lambda_1 = 18 \quad \rightarrow \lambda_2 = 2$

Luego $Hf(1,3)$ es definida positiva, por lo tanto $(x^*, y^*) = (1,3)$ es un mínimo local de f.

P2 **[Optimización con restricciones]** Resuelva el problema de optimización

$$(\mathcal{P}) \quad \min_{x,y,z} \quad x + 3y - 2z \qquad (1)$$
$$\text{s.t.} \quad \|(x,y,z)\|_2^2 = 1$$

Dem: Veamos en primer lugar que $(\mathcal{P})$ tiene solución pues $f(x,y,z) = x + 3y - 2z$ es continua y el conjunto $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x,y,z)\|_2^2 = 1\}$ es compacto, luego existe un mínimo de f en S.

Consideramos $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, luego $(\mathcal{P})$ se reescribe

$$(\mathcal{P}) \quad \min_{x,y,z} f(x,y,z)$$
$$\text{s.t} \quad g(x) = 0$$

Puesto que f y g son C^1, por Lagrange para un (x,y,z) óptimo en S existe $\lambda^* \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(x^*,y^*,z^*) = \lambda^* \nabla g(x^*,y^*,z^*)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda^* \begin{pmatrix} 2x^* \\ 2y^* \\ 2z^* \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 = 2\lambda^* x^* \\ 3 = 2\lambda^* y^* \\ -2 = 2\lambda^* z^* \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2\lambda^*} \quad y = \frac{3}{2\lambda^*} \\ z = -1/\lambda^* \end{array} \right.$$

Además $(x^*,y^*,z^*) \in S \Rightarrow x^{*2} + y^{*2} + z^{*2} = 1$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2\lambda^*}\right)^2 + \left(\frac{3}{2\lambda^*}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\lambda^*}\right)^2 = 1$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{4\lambda^*} + \frac{9}{4\lambda^*} + \frac{1}{\lambda^*} = 1 \Rightarrow \lambda^* = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$$

Veamos que multiplicador está asociado al mínimo

Caso $\lambda^* = \sqrt{\frac{7}{2}}$: Tenemos $(x^*,y^*,z^*) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{7}}, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{7}}, -\sqrt{\frac{2}{7}}\right)$

Caso $\lambda^* = -\sqrt{\frac{7}{2}}$: tenemos $(x^*,y^*,z^*) = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{7}}, -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{7}}, \sqrt{\frac{2}{7}}\right)$

Por inspección se deduce que

$$(x^*,y^*,z^*) = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{7}}, -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{7}}, \sqrt{\frac{2}{7}}\right)$$

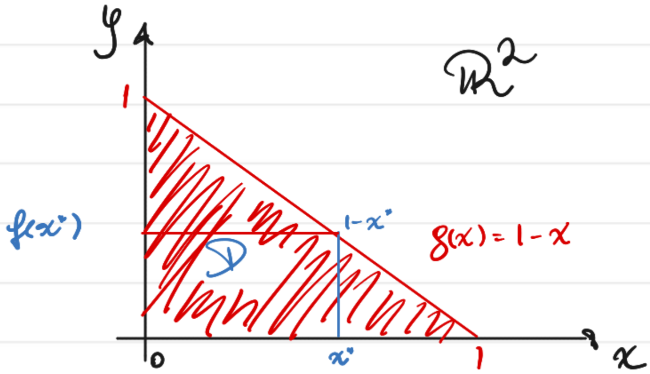
es el mínimo del problema (P)

$\boxed{\textbf{P3}}$ **[Integración]** Considere el dominio $D : \{(x, y \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$. Calcule la integral

$$\int_D f(x,y)\mathrm{d}A$$

donde $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Dem: Consideramos la región



Luego para $(x,y) \in D$, si $x \in [0,1]$ fijo, $y \in [0, 1-x]$
luego sea

$$f_D(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in D \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Entonces considerando $R = [0,1] \times [0,1]$

$$\int_D f(x,y)\, dA = \iint_R f_D(x,y)\, dA$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 \left(\int_0^1 f_D(x,y)\, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} f(x,y)\, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} x^2 + y^2\, dy \right) dx$$

Desarrollando,

$$\int_0^1\int_0^{1-x} x^2+y^2\,dy\,dx = \int_0^1 \left(yx^2 + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 (1-x)x^2 + \frac{(1-x)^3}{3}\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = 1-x \\ du = -dx \end{array}}$$

$$= \int_0^1 x^2 - x^3\,dx + \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{3}\,dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{u^3}{3}\,du = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\Big|_0^1$$

$$= 1/6$$

Finalmente,

$$\boxed{\int_D f(x,y)\,dA = 1/6}$$

P4 **[Teorema de Fubini]** Calcule las integrales

$$(a)\quad \int_0^1\int_z^1\int_y^1 e^{x^3}\,dx\,dy\,dz, \qquad (b)\quad \int_0^2 \arctan(\pi x) - \arctan(x)\,dx$$

Hint: Recuerde para (b) que $\arctan(z) = \int \frac{1}{z^2+1}dz$.

(a) Veamos $I = \int_0^1\int_z^1\int_y^1 e^{x^3}\,dx\,dy\,dz$

Vamos a usar Fubini en $\int_z^1\left(\int_y^1 e^{x^3}dx\right)dy$

Notemos que describe la región donde $z \le y \le 1$ y $y \le x \le 1$.

Podemos reescribir esta región como

i) $z \le y \le x$ ii) $z \le x \le 1$

Así, aplicando Fubini tenemos

$$\int_z^1 \int_y^1 e^{x^3}\,dx\,dy = \int_z^1 \int_z^x e^{x^3}\,dy\,dx$$

$$= \int_z^1 (x-z)e^{x^3}\,dx$$

luego

$$I = \int_0^1 \int_z^1 (x-z)e^{x^3}\,dx\,dz$$

esta integral describe los límites $z \leq x \leq 1$ y $0 \leq z \leq 1$

Esto se puede reescribir como

(iii) $0 \leq z \leq x$ (iv) $0 \leq x \leq 1$

Entonces por Fubini

$$I = \int_0^1 \int_0^x (x-z)e^{x^3}\,dz\,dx$$

$$= \int_0^1 e^{x^3} \underbrace{\int_0^x (x-z)\,dz}_{I_2}\,dx$$

tenemos $I_2 = \int_0^x x-z\,dz = x^2 - \int_0^x z\,dz = x^2 - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}$

Entonces

$$I = \int_0^1 e^{x^3} \cdot \frac{x^2}{2}\,dx \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = x^3 \\ \frac{du}{3x^2} = dx \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 e^u \cdot \cancel{x^2}\,\frac{du}{3\cancel{x^2}}$$

Desarrollando,

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 e^u\,du = \frac{1}{6}(e-1)$$

Finalmente

$$\boxed{\int_0^1\int_z^1\int_y^1 e^{x^3}\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{6}(e-1)}$$

(6) Veamos $I = \int_0^2 \arctan(\pi x) - \arctan(x)\,dx$

Por el TFC tenemos

$$I = \int_0^2 \int_x^{\pi x} \frac{1}{1+y^2}\,dy\,dx$$

que describe la región $x \leq y \leq \pi x$, $0 \leq x \leq 2$, esto se reescribe

$$\Rightarrow \quad 0 \leq y \leq 2\pi, \quad \underbrace{\frac{y}{\pi} \leq x \leq 2, \quad \frac{y}{\pi} \leq x \leq y}$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{y}{\pi} \leq x \leq \min\{2, y\}}$$

Luego por Fubini

$$I = \int_0^2 \int_x^{\pi x} \frac{1}{1+y^2}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{y}{\pi}}^{\min\{2,y\}} \frac{1}{1+y^2}\,dx\,dy$$

Desarrollando,

$$I = \underbrace{\int_0^2 \int_{\frac{y}{\pi}}^{y} \frac{1}{1+y^2}\, dx\, dy}_{I_4} + \underbrace{\int_2^{2\pi} \int_{\frac{y}{\pi}}^{2} \frac{1}{1+y^2}\, dx\, dy}_{I_3}$$

Tenemos

$$I_3 = \int_2^{2\pi} \int_{\frac{y}{\pi}}^{2} \frac{1}{1+y^2}\, dx\, dy = \int_2^{2\pi} \frac{1}{1+y^2}\left(2 - \frac{y}{\pi}\right) dy$$

$$= 2\int_2^{2\pi} \frac{1}{1+y^2}\, dy - \frac{1}{\pi}\int_2^{2\pi} \frac{y}{y^2+1}\, dy \qquad \boxed{\int \frac{f'}{f} = \ln(|f|)}$$

$$= 2\int_2^{2\pi} \frac{1}{1+y^2}\, dy - \frac{1}{2\pi}\int_2^{2\pi} \frac{2y}{y^2+1}\, dy$$

$$= 2 \arctan y \Big|_2^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\left(\ln(y^2+1)\right)\Big|_2^{2\pi}$$

$$= 2(\arctan 2\pi - \arctan 2) - \frac{1}{2\pi}\left(\ln(4\pi^2+1) - \ln(5)\right)$$

Por otro lado

$$I_4 = \int_0^2 \int_{\frac{y}{\pi}}^{y} \frac{1}{1+y^2}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{1+y^2}\left(y - \frac{y}{\pi}\right) dy = \left(1 - \frac{1}{\pi}\right)\int_0^2 \frac{y}{y^2+1}\, dy$$

(NIKITA)

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\right)\int_0^2 \frac{2y}{y^2+1}\, dy = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\right)\ln(y^2+1)\Big|_0^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\right)\ln(5)$$

Finalmente

$$\boxed{I = 2(\arctan 2\pi - \arctan 2) - \frac{1}{2\pi}\left(\ln(4\pi^2+1) - \ln(5)\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\right)\ln(5)}$$

P5 **[Teorema del Cambio de Variable]** Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} \tag{2}$$

Ind: Considere I la integral descrita en (2) y estudie el valor de I^2, puede ser útil usar coordenadas polares.

TCV: Sea $T \in \mathcal{C}^1(U)$, si $f : T(U) \to \mathbb{R}$ es integrable

$$\Rightarrow \int_{T(U)} f(y)\,dy = \int_U (f \circ T)(x)\,|\det DT(x)|\,dx$$

Dem: Consideramos

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy\right)$$

$$\xrightarrow{\text{Fubini}} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

Consideramos la transformación a Polares

$$T(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta) = (x, y)$$

donde $\rho \in (0, +\infty)$, $\theta \in (0, 2\pi)$ $\left(\begin{array}{l} U = (0,+\infty) \times (0, 2\pi) \\ T(U) = (-\infty, +\infty) \\ \quad \times (-\infty, +\infty) \end{array}\right)$

luego,

$$\det(DT(\rho,\theta)) = \left|\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}(\rho,\theta)\right|$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho\cos^2\theta + \rho\,\text{sen}^2\theta = \rho$$

Luego, por TCV, usando que $(x^2+y^2)(\rho,\theta) = \rho^2$

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$$

$$\boxed{|\det(DT(\rho,\theta))| = |\rho| = \rho}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\rho^2}\, \rho\, d\rho\, d\theta$$

Haciendo $u = \rho^2$, $\frac{du}{d\rho} = 2\rho$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \rho\, d\rho = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{2}\, du$$

$$= \frac{1}{2}\left(-e^{-u}\right)\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}(-0+1) = \frac{1}{2}$$

luego,

$$I^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\rho^2}\, \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\, d\theta = \pi$$

Por lo tanto,

$$\boxed{I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}}$$