Auxiliar 10: Teorema de la Función Inversa & Implícita

Profesor: Alexander Frank M.
Auxiliar: Maximiliano S. Lioi

P1 **[Teorema de la Función Inversa]** Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

(i) Pruebe que f no es inyectiva, y por lo tanto, no es invertible sobre todo $\mathbb{R}^2$.

(ii) Demuestre que para todo $(x, y) \neq (0, 0)$ existen abiertos U, V en $\mathbb{R}^2$ con $(x, y) \in U$ y $f(x, y) \in V$ tales que $f : U \to V$ es biyectiva.

P2 **[Teorema de la Función Implícita I]** Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 + y + \sin(xyz) + z^2 &= 1 \\ e^{yz} + xz &= 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Muestre que el sistema anterior define implícitamente dos funciones $y = y(x)$ y $z = z(x)$ en una vecindad de $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 0)$ que satisfacen el sistema de ecuaciones anterior.

P3 **[Teorema de la Función Implícita II]** Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2xz &= y^2 + w^2 \\ z^3 &= x^3 + y^3 + w^3. \end{aligned} \tag{2}$$

(i) Mostrar que existe un abierto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ que contiene a $(1, 1)$ y funciones $y, w : A \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ tales que $y = y(x, z)$ y $w = w(x, z)$ son soluciones del sistema de ecuaciones anterior, y además $y(1, 1) = -1$, $w(1, 1) = 1$.

(ii) Mostrar que $\nabla y(1, 1) = \binom{-1}{0}$ y $\nabla w(1, 1) = \binom{0}{1}$.

(iii) **[Propuesto]** Calcular las matrices Hessianas $Hy(1, 1)$, $Hw(1, 1)$. **Ind**: Derive dos veces el sistema de ecuaciones (2) respecto de x y de z para deducir los Hessianos.

(iv) **[Propuesto]** Muestre que los polinomios de Taylor de grado dos, que aproximan a $y(x, z)$ y

$$p(x, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{2} - x - xz, \quad q(x, z) = -\frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{2} + z + xz \tag{3}$$

P4 **[Propuesto]** Probar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y^2 + z^2 - x^2 + 2 &= 0 \\ yz + xz - xy - 1 &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

define dos funciones implícitas $y(x)$, $z(x)$ en un entorno del punto $(2, 1, 1)$ tales que $(x, y(x), z(x))$ es solución del sistema en dicho entorno.

Resumen

Teorema 1 (Teorema de la Función Inversa) *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 en Ω. Supongamos que para algún $x_0 \in \Omega$, la derivada $Df(x_0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es invertible (i.e, $\det(Df(x_0)) \neq 0$). Entonces existen abiertos U, V con $x_0 \in U \subset \Omega$ e $y_0 := f(x_0) \in V$, tales que $f|_U : U \to V$ es un difeomorfismo de clase C^1, esto es, una biyección tal que $f|_U^{-1}$ es de clase C^1. Además, por ser $(f|_U)^{-1} : V \to U$ continua y diferenciable en todo punto de V, se tiene $Df|_U^{-1}(f|_U(x_0)) = (Df|_U(x_0))^{-1}$*

Teorema 2 (Teorema de la Función Implicita) *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 y $(x_0, y_0) \in \Omega$ tal que $f(x_0, y_0) = 0$. Sea $Df(x_0, y_0) = [D_x f(x_0, y_0), D_y f(x_0, y_0)]$ la derivada de f en (x_0, y_0), supongamos que $D_y f(x_0, y_0)$ es invertible. Entonces existen abiertos U, W con $(x_0, y_0) \in U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ y $x_0 \in W$ tales que para cada $x \in W$ existe un único y tal que $(x, y) \in U$ y $f(x, y) = 0$, lo que define una función $g : W \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1, en particular $y_0 = g(x_0)$, de manera que*

$$f(x, g(x)) = 0, \forall x \in W$$

además

$$Dg(x) = -D_y f(x, g(x))^{-1} D_x f(x, g(x))$$

Definición 1 (Matriz Hessiana) *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función de clase $C^2(U)$. Llamamos matriz Hessiana de f en x a la matriz $D(\nabla f)(x)^T$, que denotamos:*

$$D^2 f(x) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{bmatrix}$$

otras formas comunes para denotar la matriz Hessiana son $Hf(x)$ o bien $f''(x)$.

Proposición 1 *Para $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función de clase $C^2(U)$ y $\bar{x} \in U, D^2 f(\bar{x})$ es simétrica, y por lo tanto sus valores propios son reales.*

Teorema 3 (Taylor) *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^{k+1} en A, $k \geq 1$, con A abierto. Sean también $x_0 \in A$ y $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_0 + th \in A$, para todo $t \in [0, 1]$. Entonces, la siguiente expansión de f es válida:*

$$f(x_0 + h) = P_k(x_0, h) + R_{k+1}(x_0, h) \tag{5}$$

$$P_k(x_0, h) := \sum_{\ell=0}^{k} T_\ell(x_0, h)$$

donde $T_\ell(x_0, h)$ es el monomio de Taylor de orden ℓ, dado por la expresión

$$T_\ell(x_0, h) := \frac{1}{\ell!} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_\ell=1}^{n} \frac{\partial^\ell f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_\ell}}(x_0) h_{i_1} \cdots h_{i_\ell},$$

para $1 \leq \ell \leq k$, y $R_{k+1}(x_0, h)$ es el resto de orden $k + 1$ de la expansión (5)*, dado por*

$$R_{k+1}(x_0, h) := \frac{1}{(k+1)!} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_{k+1}=1}^{n} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k+1}}}(x_0 + sh) h_{i_1} \cdots h_{i_{k+1}}$$

para cierto $s \in [0, 1]$.

Corolario 1 *Supongamos que $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^2 en A, y sean $x_0 \in A, h \in \mathbb{R}^n$ pequeño. Entonces, el polinomio de Taylor de orden dos para f en torno a x_0, denotado $P_2(x_0, h)$ viene dado, explícitamente, por la expresión*

$$f(x_0) + \nabla f(x_0) h + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j,$$

Equivalentemente, se puede escribir

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0) h + \frac{1}{2} h^T D^2 f(x_0) h$$

o bien, escogiendo $h = x - x_0$ tenemos $f(x) \approx$

$$f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T D^2 f(x_0)(x - x_0)$$

para x cerca de x_0.

Pauta Aux 10

P1 **[Teorema de la Función Inversa]** Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

(i) Pruebe que f no es inyectiva, y por lo tanto, no es invertible sobre todo $\mathbb{R}^2$.

(ii) Demuestre que para todo $(x, y) \neq (0, 0)$ existen abiertos U, V en $\mathbb{R}^2$ con $(x, y) \in U$ y $f(x, y) \in V$ tales que $f : U \to V$ es biyectiva.

TFI:

Teorema 3.21 (Función Inversa). *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ una función de clase C^1 en A. Supongamos que para algún $x_0 \in A$, $f'(x_0) \in M_{dd}(\mathbb{R})$ es invertible. Entonces lo siguiente se satisface:*

1. *Existen abiertos U, V en $\mathbb{R}^d$, con $x_0 \in U \subseteq A$ e $y_0 := f(x_0) \in V$, tales que $f : U \to V$ es biyectiva.*
2. *Si $g : V \to U$ es la inversa de f, entonces $g(f(x)) = x$ para cualquier $x \in U$, g es de clase C^1 en V y se tiene la identidad*

$$g'(f(x))f'(x) = I_d. \tag{3.70}$$

☆ $x = f^{-1}(f(x)) \Rightarrow D(f^{-1} \circ f)(x) = Df^{-1}(f(x))Df(x) = Id$

Dem: (i) Notemos que para $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, considerando $(-x,-y)$ se tiene

$$f(-x,-y) = ((-x)^2 - (-y)^2, 2(-x)(-y))$$

$$= (x^2 - y^2, 2xy) = f(x,y)$$

$\Rightarrow$ f no es inyectiva $\left((x,y) \neq (-x,-y)\right)$

$\Rightarrow$ f^{-1} no existe en todo $\mathbb{R}^2$

(ii) Sea $(x,y) \neq (0,0)$, si logramos probar que $Df(x,y) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es invertible podemos concluir por Teo. de la Función Inversa que existen abiertos U, V tales que $f : U \to V$ es biyectiva (f es C^1!)

Tenemos $f_1(x,y) = x^2 - y^2$, $f_2(x,y) = 2xy$

$$\Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 2x, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -2y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 2y, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = 2x$$

Luego,

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

Notemos que para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$,

$$\det(Df(x,y)) = \left| \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \right|$$

$$= 4x^2 + 4y^2 > 0$$

Por lo tanto, $Df(x,y)$ es invertible, luego por Teo. de la Función Inversa, concluimos que existen abiertos U, V tales que $f: U \to V$ es biyectiva.

Teorema 3.23 (Función Implícita). *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{d+p} \to \mathbb{R}^p$ de clase C^1 en Ω, con Ω abierto, y sea $(x_0, y_0) \in \Omega$ tal que $f(x_0, y_0) = 0$. Sea $f'(x_0, y_0)$ la matriz derivada de f, y supongamos que la submatriz $f_y(x_0, y_0)$ es invertible. Entonces existen abiertos $U \subseteq \mathbb{R}^{d+p}$ y $W \subseteq \mathbb{R}^d$ tales que*

1. *$(x_0, y_0) \in U$ y $x_0 \in W$,*
2. *Para todo $x \in W$, existe un único y tal que $(x, y) \in U$ y $f(x, y) = 0$.*
3. *Si escribimos $y = g(x)$, entonces $g : W \to \mathbb{R}^p$ es de clase C^1 y $g(x_0) = y_0$.*
4. *Finalmente,*

$$f(x, g(x)) = 0 \quad \text{para todo } x \in W, \tag{3.85}$$

y

$$g'(x_0) = -[f_y(x_0, y_0)]^{-1} f_x(x_0, y_0) \in M_{pd}(\mathbb{R}). \tag{3.86}$$

2. El Teorema anterior puede leerse de la manera siguiente: la ecuación $f(x, y) = 0$ corresponde a un sistema no lineal de p ecuaciones y $d + p$ incógnitas:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_d, y_1, y_2, \ldots, y_p) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_d, y_1, y_2, \ldots, y_p) &= 0, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad &\vdots \\ f_p(x_1, x_2, \ldots, x_d, y_1, y_2, \ldots, y_p) &= 0, \end{aligned}$$

es decir, poseemos más incógnitas que ecuaciones, por lo que se espera que haya muchas soluciones. Por lo mismo, si (x_0, y_0) es solución del sistema de ecuaciones anterior, y bajo la condición $f_y(x_0, y_0)$ invertible (i.e. $\det f_y(x_0, y_0) \neq 0$), es posible **despejar**, de manera **implícita**, y como función de x en las cercanías de x_0, y la función g que asocia a cada x cercano a x_0, el valor $y = g(x)$, cercano a y_0, es de clase C^1. Finalmente, $(x, g(x))$ resuelve el sistema de ecuaciones de arriba para cualquier x suficientemente cercano a x_0.

P2 **[Teorema de la Función Implícita I]** Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 + y + \sin(xyz) + z^2 &= 1 \\ e^{yz} + xz &= 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Muestre que el sistema anterior define implícitamente dos funciones $y = y(x)$ y $z = z(x)$ en una vecindad de $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 0)$ que satisfacen el sistema de ecuaciones anterior.

Dem: Consideramos $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,w) = f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + y + \sin(xyz) + z^2 - 1 \\ e^{yz} + xz - 1 \end{pmatrix}$$

donde $w = (y,z)$, luego, puesto que $(x_0, y_0, z_0) = (1,0,0)$ satisface

$$f(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 + 0 + \sin(0)^{0} + - 1 \\ 1 + 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si f es C^1 en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ y $D_w f(x_0, w_0)$ con $w_0 = (y_0, z_0)$ es invertible, entonces por Teo. de la Función Implícita, tendremos que existe una vecindad de (x_0, y_0, z_0) en donde existe $w(x) = (y(x), z(x))$ definida en dicha vecindad tal que

$$\underline{f(x, y(x), z(x)) = 0}$$

Por un lado f es de clase C^1 pues f_1 y f_2 son C^1 por álgebra y composición de funciones C^1.

Procedemos a calcular $D_w f(x,w) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix}$

Tenemos $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = 1 + xz\cos(xyz)$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial z} = xy\cos(xyz) + 2z$

$\dfrac{\partial f_2}{\partial y} = z e^{yz}$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial z} = y e^{yz} + x$

Luego

$$Df_w(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 + xz\cos(xyz) & xy\cos(xyz) + 2z \\ z e^{yz} & y e^{yz} + x \end{pmatrix}(1,0,0)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $D_w f(1,0,0)$ es invertible y f es C^1, por Teo. de la Función Implícita, existe una vecindad de $(1,0,0)$ y una función implícita $w(x) = (y(x), z(x))$ tal que

$$\underline{f(x, y(x), z(x)) = 0}$$

$\blacksquare$

P3 **[Teorema de la Función Implícita II]** Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2xz &= y^2 + w^2 \\ z^3 &= x^3 + y^3 + w^3. \end{aligned} \tag{2}$$

(i) **Mostrar que existe un abierto** $A \subseteq \mathbb{R}^2$ **que contiene a** $(1,1)$ **y funciones** $y, w : A \to \mathbb{R}$ **de clase** $\mathcal{C}^\infty$ **tales que** $y = y(x,z)$ **y** $w = w(x,z)$ **son soluciones del sistema de ecuaciones anterior, y además** $y(1,1) = -1$, $w(1,1) = 1$.

(ii) **Mostrar que** $\nabla y(1,1) = \binom{-1}{0}$ **y** $\nabla w(1,1) = \binom{0}{1}$.

Dem: (i) Consideremos $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,z,y,w) = \begin{pmatrix} y^2 + w^2 - 2xz \\ x^3 + y^3 + w^3 - z^3 \end{pmatrix}$$

Luego, para encontrar funciones implícitas $y(x,z)$ y $w(x,z)$ que resuelven el sistema en un entorno A de $(x_0,z_0) = (1,1)$ con $y(x_0,z_0) = -1$ y $w(x_0,z_0) = 1$ debemos ver que $f(1,1,-1,1) = (0,0)$ que en efecto al reemplazar

$$f(1,1,-1,1) = \begin{pmatrix} (-1)^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1 \\ 1^3 + (-1)^3 + 1^3 - 1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ver que f es $\mathcal{C}^\infty$, lo cual se tiene pues f_1 y f_2 son de clase $\mathcal{C}^\infty$ (son polinomios), y considerando la notación $f(s,t) = f(x,z,y,w)$, ver que

$$D_t f(1,1,-1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial w} \end{pmatrix}(1,1,-1,1)$$

es invertible, calculamos

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial f_1}{\partial w} = 2w, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 3y^2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial w} = 3w^2$$

luego $D_t f(1,1,-1,1) = \begin{pmatrix} 2y & 2w \\ 3y^2 & 3w^2 \end{pmatrix}(1,1,-1,1)$

Esto es $D_t f(1,1,-1,1) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \det\left(D_t f(1,1,-1,1)\right) = -6-6 = -12 \neq 0$$

$$\Rightarrow D_t f(1,1,-1,1) \text{ es invertible}$$

Luego, por teo. de la función implícita, deducimos que existe A abierto que contiene a $(1,1)$ y funciones implícitas $t(s) = (y(x,z), w(x,z))$ que resuelven el sistema en dicha vecindad.

(ii) Mostrar que $\nabla y(1,1) = \binom{-1}{0}$ y $\nabla w(1,1) = \binom{0}{1}$.

(ii) Debemos encontrar

$$\nabla y(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial z} \end{pmatrix}(1,1), \quad \nabla w(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial z} \end{pmatrix}(1,1)$$

Del teo. de la Función Implícita, para $t(s) = (y(x,z), w(x,z))$

$$D_s t(1,1) = -\left(D_t f(1,1,-1,1)\right)^{-1}\left(D_s f(1,1,-1,1)\right)$$

donde $D_s t(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}(1,1)$

$$D_s f(1,1,-1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix}(1,1,-1,1)$$

Tenemos $\frac{\partial f_1}{\partial x} = -2z$, $\frac{\partial f_1}{\partial z} = -2x$, $\frac{\partial f_2}{\partial x} = 3x^2$, $\frac{\partial f_2}{\partial z} = -3z^2$

Luego

$$D_S f(1,1,-1,1) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D_S t(1,1) = -\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Recordemos que si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-6-6}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D_S t(1,1) = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\nabla y(1,1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla w(1,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$