Ejercicios

Tema 7: Integral triple de Riemann

1. Hallar
$$\iiint\limits_R \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{1+x+y+z}}$$
donde $R = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.
Sol.: $\frac{8}{15}\left(31 - 27\sqrt{3} + 12\sqrt{2}\right)$.

2. Hallar
$$\iiint\limits_D \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$$
donde D es el tetraedro acotado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + y + z = 1$.
Sol.: $\frac{\ln 2}{2} - \frac{5}{16}$.

3. Hallar el volumen de una esfera de radio r.
Sol.: $\frac{4}{3}\pi r^3$.

4. Hallar
$$I = \iiint\limits_D x\,dx\,dy\,dz$$
donde D es la región acotada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$, $x, y \geq 0$.
Sol.: $I = \frac{8\sqrt{2}}{15}$.

5. Hallar el volumen del recinto interior al cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ y comprendido entre los planos $z = 0$ y $z = a > 0$.
Sol.: $a\pi$.

6. Hallar el volumen del recinto limitado por las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 2rz$, $r > 0$, y $x^2 + y^2 = z^2$, y que contiene al punto $(0, 0, r)$ en su interior.
Sol.: πr^3.

7. Hallar el volumen del recinto limitado por la superficie $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$, $a > 0$.
Sol.: $\frac{\pi a^3}{3}$.

8. Calcular las siguientes integrales triples:

   (a) $\iiint\limits_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz$, si D está limitado por $x^2 + y^2 = 2z$ y $z = 2$.

   (b) $\iiint\limits_D \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)^{1/2} dx\,dy\,dz$, si D es $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \leq 1$.

   (c) $\iiint\limits_D (4x - y + z)\,dx\,dy\,dz$, si D está limitado por $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$ y $z = 2 - x^2$.

   Sol.: (a) $\frac{16\pi}{3}$; (b) $\frac{abc\pi^2}{4}$; (c) $\frac{5}{3}$.

9. Calcular los volúmenes de los sólidos limitados por:

(a) $(x^2+y^2+z^2)^2 = 2z(x^2+y^2)$.

(b) el plano $z=0$ y el cono de vértice el punto $(0,0,1)$ y que corta al plano $z=0$ según la curva $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=0.25$.

Sol.: (a) $\frac{2\pi}{15}$; (b) $\frac{\pi}{12}$.

10. Hallar $\iiint\limits_D \sqrt{|y|}\,dx\,dy\,dz$, si $D=\{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2\leq 2x\ ,\ 0\leq z\leq\sqrt{x^2+y^2}\}$.
Sol.: $\frac{5\pi}{7}$.

11. Hallar la integral:

$$\iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$$

donde D es el recinto limitado por la superficie $x^2+y^2=z(1-z)$.
Sol.: $\frac{\pi^2}{64}$.

12. Hallar la masa y el centro de gravedad de las siguientes regiones limitadas por las superficies descritas, y con la densidad puntual que se indica:

(a) $z^2=y^2(1-x^2)$, $y=1$; $\rho(x,y,z)=\rho_0$.

(b) $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+z=a>0$, $y=z$; $\rho(x,y,z)=x$.

(c) $z^2=x^2+y^2$, $x^2+y^2=2ax$; $\rho(x,y,z)=x^2+y^2$.

Sol.: (a) $m=\frac{\pi\rho_0}{2}$ y $G\left(0,\frac{2}{3},0\right)$; (b) $m=\frac{a^4}{24}$ y $G\left(\frac{2a}{5},\frac{a}{5},\frac{2a}{5}\right)$; (c) $m=\frac{2^{10}a^5}{75}$ y $G\left(\frac{5a}{7},0,0\right)$.

13. Hallar el volumen del sólido limitado por el plano $z=0$, el parabolóide $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ y el cilindro $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{2x}{a}$.
Sol.: $\frac{3ab\pi}{2}$.

14. Hallar el volumen del sólido limitado por la superficie de ecuación

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^3x \qquad , \quad a>0$$

Sol.: $\frac{\pi a^3}{3}$.

15. Calcular la integral

$$\iiint\limits_D \left|x^2-z^2\right|\,dx\,dy\,dz$$

donde $D=\left\{(x,y,z)\ :\ x^2+z^2\leq y\leq 1\right\}$.
Sol.: $\frac{1}{3}$.

16. (**Febrero 1999**) Calcular la integral

$$I=\iiint\limits_\Omega \left(y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2\right)\,dx\,dy\,dz$$

donde Ω es el recinto acotado entre las superficies de ecuaciones $x^2+z^2=y^2$ y $x^2+z^2=2az$, $a>0$.
Sol.: $I=\frac{41\cdot 2^{13}\cdot a^7}{11\cdot 9\cdot 7^2\cdot 5}$.

17. (**Septiembre 1999**) Calcular la integral $\iiint_V \left(x^2+y^2\right)^{3/2}\,dx\,dy\,dz$, donde V es el recinto limitado por la superficie $x^2+y^2+z^2=z$.
Sol.: $\frac{\pi^2}{2^9}$.