Ejercicios

Tema 5: Integral doble de Riemann

1. Estudiar la integrabilidad Riemann de la función f, sobre el rectángulo R, en los siguientes casos:

   (a) $R = [a, b] \times [c, d]$ y $f(x, y) = 1$, $\forall (x, y) \in R$.

   (b) $R = [0, 1] \times [0, 1]$ y
   $$f(x,y) = \begin{cases} 1 & , \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

   Sol.: (a) $I = (b - a)(d - c)$; (b) No existe.

2. Hallar la integral de $f(x, y) = x \operatorname{sen} y - ye^x$ sobre el rectángulo $R = [-1, 1] \times [0, \pi/2]$.
   Sol.: $\frac{\pi^2}{8}\left(e^{-1} - e\right)$

3. Hallar la integral de $f(x, y) = \sqrt{|y - x^2|}$ sobre $R = [-1, 1] \times [0, 2]$.
   Sol.: $\frac{4}{3} + \frac{\pi}{2}$

4. Hallar el centro de gravedad de la región plana limitada por un arco de sinusoide de densidad constante ρ_0.
   Sol.: Masa$=2\rho_0$; Centro de gravedad$=\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$.

5. Hallar el área de la superficie determinada por $z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$ sobre el cuadrado $S = [0, 1] \times [0, 1]$.
   Sol.: $\frac{4}{15}\left(1 + 9\sqrt{3} - 8\sqrt{2}\right)$.

6. Hallar $\iint\limits_S \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$ donde $S = \left\{(x, y) \,:\, x^2 + y^2 \leq a^2,\ x, y \geq 0\right\}$.
   Sol.: $\frac{\pi a^3}{6}$.

7. Hallar la integral de $f(x, y) = e^{\frac{y-x}{y+x}}$ sobre el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(0, 2)$.
   Sol.: $e - e^{-1}$.

8. Hallar el volumen del recinto limitado por el cilindro $x^2 + (y - a)^2 = a^2$, el plano $z = 0$ y el parabolóide $4az = x^2 + y^2$, $a > 0$.
   Sol.: $\frac{3\pi a^3}{8}$.

9. Calcular las siguientes integrales dobles:

   (a) $\iint\limits_D (xy)^2\, dx\, dy$, si D está limitado por $y > 0$, $xy < 1$ y $x^2 - 3xy + 2y^2 < 0$.

   (b) $\iint\limits_D (x + y)\, dx\, dy$, si D está limitado por $x^2 + y^2 = x + y$.

   (c) $\iint\limits_D \left|\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2\right| dx\, dy$, si D está limitado por $x^2 + y^2 \leq 1$.

   Sol.: (a) $\frac{\ln 2}{6}$; (b) $\frac{\pi}{2}$; (c) $\frac{9\pi}{16}$.

10. Hallar las áreas interceptadas por las curvas:

(a) $\rho = 2a$, $\rho = 4a\cos\theta$, $(a > 0)$.

(b) $\rho = 2$, $\rho = 2(1+\cos\theta)$, e interior al primer cuadrante.

Sol.: (a) $\left(\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}\right) a^2$; (b) $\frac{\pi+8}{2}$.

11. Hallar el área del recinto acotado del primer cuadrante encerrado por la curva:

$$(x^2+y^2)^2 = \sqrt{xy}$$

Sol.: $\frac{1}{4}\beta\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

12. Calcular la integral:

$$\iint_D \frac{x^2 e^{x^2/y}}{y(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

donde D es el recinto limitado en el primer cuadrante por las rectas $x = y$, $x = 2y$ y las parábolas $x^2 = y$, $x^2 = 2y$.
Sol.: $e(e-1)\left(\arctan 2 - \frac{\pi}{4}\right)$.

13. Hallar la masa y el centro de gravedad de la región:

$$F = \{(x,y)\ :\ 0 \le x \le 1\,,\ x^3 \le y \le \sqrt{x}\,\}$$

si la densidad de los puntos de F viene dada por $\rho(x,y) = 3x$.
Sol.: Masa=$\frac{3}{5}$; Centro de gravedad= $\left(\frac{25}{42},\frac{25}{48}\right)$.

14. Hallar el área de las siguientes superficies:

(a) La parte del cilindro $x^2+z^2=a^2$ dentro del cilindro $x^2+y^2=a^2$.

(b) La parte del cono $z^2 = x^2+y^2$ dentro del cilindro $x^2+y^2 = 2x$.

(c) La parte de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 4z$ dentro del parabolóide $x^2+y^2 = z$.

(d) La parte del cilindro $x^2+z^2=a^2$ sobre el cuadrado $|x| \le a/2$, $|y| \le a/2$.

Sol.: (a) $8a^2$; (b) $4\sqrt{2}\pi$; (c) 4π; (d) $\frac{\pi a^2}{3}$.

15. Calcular los volúmenes de los sólidos limitados por:

(a) $x^2+4y^2 = z$, $z = 0$, $y^2 = x$, $x^2 = y$.

(b) $x^2+y^2 = 1$, $x^2+y^2 = 2$, $z(x^2+y^2) = 1$, $z = 0$.

(c) $z = 0$, $x^2+y^2 = a^2$, $x \ge 0$ y el plano que pasa por la recta $x = z = 0$ y que forma un ángulo α con el plano $z = 0$.

(d) $(x-c)^2+(y-d)^2 = k^2$, $(c > d > k > 0)$, $xy = z$, $z = 0$.

(e) $3x^2+y^2 = 72z$, $2x^2+y^2 = 24(2-z)$.

(f) $z = 0$, $\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q} = z$, $(p,q > 0)$, $x^2+y^2 = a^2$.

(g) $z = x^2+y^2$, $z = 2(x^2+y^2)$, $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $x = 2y$, $2x = y$, $x > 0$.

Sol.: (a) $\frac{3}{7}$; (b) $\pi\ln 2$; (c) $\frac{2a^3}{3}\tan\alpha$; (d) $cdk^2\pi$; (e) 24π; (f) $\frac{\pi a^4}{8}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)$; (g) $\frac{9a^4}{4}$.

16. Hallar el volumen del sólido limitado por los parabolóides $y^2 + z^2 = -2(x-1)$ e $y^2 + z^2 = 2(x+1)$.
Sol.: 2π.

17. Hallar el volumen del recinto interior al cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, y comprendido entre los planos $z = x$, $z = 2x$.
Sol.: π.

18. Hallar el volumen del recinto interior al cilindro $x^2+y^2 = 2x$, y limitado por el plano $z = 0$ y la superficie
$$z = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$
Sol.: $\frac{\pi}{6}$.

19. Calcular la integral:
$$\iint_D \sqrt{y^2 - 4x^2}\, dx\, dy$$
donde D es el recinto acotado limitado por las rectas $y - 2x = -1$, $y + 2x = -1$, y por la hipérbola $y^2 - 4x^2 = 1/4$.
Sol.: $\frac{7-3\ln 2}{72}$.

20. Hallar el volumen del sólido limitado por el plano $z = 0$, el parabolóide $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ y el cilindro $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2x}{a}$.
Sol.: $\frac{3ab\pi}{2}$.

21. Hallar el volumen del recinto interior al cilindro $(x-2)^2 + y^2 = 1$ y limitado por el plano $z = 1$ y por el parabolóide $x^2 + y^2 = z$.
Sol.: $\frac{7\pi}{2}$.

22. (**Septiembre 1999**)Calcular la integral doble $\iint_D \arctan \frac{y}{x}\, dx\, dy$, donde
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x^2 + y^2 \le 9,\ x \le y\sqrt{3},\ y \le x\sqrt{3}\right\}$$
Sol.: $\frac{\pi^2}{6}$.