UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
Escuela de Ingeniería
2014-2 MA2001-3

Profesor: Alexander Frank M.
Auxiliar: Sebastián Perez S.

Control 2

P1. Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$, y $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 + xy + \ln\left(\frac{1}{x^2 y}\right).$$

a) (2,5 pts.) Muestre que f es de clase $\mathcal{C}^2$ y convexa ¿Es estrictamente convexa? Justifique.

b) (1,5 pts.) Encuentre los puntos críticos de f y clasifíquelos de acuerdo a si la función alcanza un mínimo local en ellos, un máximo local, o son puntos silla.

c) (2,0 pts.) Muestre que f alcanza su mínimo (global) en un único elemento de A, y no alcanza su máximo. Para esto puede ser útil lo siguiente:

- Considerar $(a,b) \in \mathrm{Fr}(A)$, y mostrar que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = +\infty$.
- Mostrar que $\lim\limits_{\substack{\|(x,y)\|\to+\infty \\ (x,y)\in A}} f(x,y) = +\infty$.

[Indicación: Para esto último puede usar el hecho de que $x - \ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$]

P2. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2xz &= y^2 + w^2 \\ z^3 &= x^3 + y^3 + w^3. \end{aligned}$$

a) (1,0 pto.) Mostrar que existe un abierto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ que contiene a $(1,1)$ y funciones $y, w : A \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ tales que:

- $y = y(x,z)$ y $w = w(x,z)$ son soluciones del sistema de ecuaciones anterior, y además
- $y(1,1) = -1$ y $w(1,1) = 1$.

b) (1,5 pts.) Mostrar que $\nabla y(1,1) = \binom{-1}{0}$ y $\nabla w(1,1) = \binom{0}{1}$.

c) (2,5 pts.) Calcular las matrices hessianas $H_y(1,1)$ y $H_w(1,1)$.

d) (1,0 pto.) Muestre que los polinomios de Taylor de grado dos, que aproximan a $y(x,z)$ y $w(x,z)$ en torno a $(1,1)$, son respectivamente

$$\begin{aligned} p(x,z) &= \frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{2} - x - xz, \quad \text{y} \\ q(x,z) &= -\frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{2} + z + xz. \end{aligned}$$

P3. Dada una cierta función $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, llamaremos *sección de altura* c de f, al conjunto de los puntos de su grafo $\mathrm{Gr}(f) \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ tales que $x_{N+1} = c$.

Sean $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas por las ecuaciones $g(x,y) = x^2 + y^2$ y $h(x,y) = 2x + y^2$. Encontrar la mínima distancia en $\mathbb{R}^3$ entre la sección de altura 3 de g, y la sección de altura 6 de h.

Para esto siga los siguientes pasos:

a) (0,5 pts.) Establezca una función a minimizar adecuada, con las restricciones que correspondan.

b) (1,5 pts.) Escriba el sistema de ecuaciones que se obtiene al aplicar el método de Lagrange a la parte anterior.

c) (3,0 pts.) Encuentre las soluciones del sistema anterior.

d) (1,0 pto.) Concluya.

Pauta Control 2

Pregunta 1

Auxiliar: Sebastián Pérez

a) Para facilitar el análisis, escribimos la fórmula de f de la siguiente manera

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 + xy - 2\ln(x) - \ln(y).$$

Para $x, y > 0$ la función es diferenciable, pues es la suma de funciones diferenciables. Se obtienen las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{2} + y - \frac{2}{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + x - \frac{1}{y}, \qquad \text{(0,4pts.)}$$

y las derivadas parciales de segundo orden $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 + \dfrac{1}{y^2}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 1$. (0,6pts.)

Como cada derivada parcial de segundo orden define una función continua en A, entonces f es de clase $\mathcal{C}^2$. (0,2pts.)

Para analizar la convexidad de f, consideramos la matriz hessiana

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{2}{x^2} & 1 \\ 1 & 2 + \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}. \qquad \text{(0,1pts.)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{x^2} > \dfrac{1}{2} > 0 \\ \det(H(x,y)) = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{x^2}\right)\left(2 + \dfrac{1}{y^2}\right) - 1 > \dfrac{1}{2} \cdot 2 - 1 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} H(x,y) \text{ es definida positiva} \\ \text{para todo } (x,y) \in A. \end{array}$$

(0,7pts.)

Por lo tanto f es estrictamente convexa en todo su dominio A. (0,5pts.)

b) Se sabe de antemano que para una función diferenciable y estrictamente convexa, todos sus puntos críticos son mínimos locales, y no puede tener más de uno.

Procedemos a buscar el único punto crítico, en caso de que exista.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} \frac{x}{2} + y - \frac{2}{x} & = & 0 \\ 2y + x - \frac{1}{y} & = & 0 \end{array}\right\} \qquad \text{(0,5pts.)}$$

Una manera de resolver el sistema es la siguiente: de la primera ecuación, $y = \frac{2}{x} - \frac{x}{2} = \frac{4-x^2}{2x}$; reemplazando en la segunda ecuación,

$$\begin{aligned} \left(\frac{4-x^2}{x}\right) + x - \frac{2x}{4-x^2} = 0 &\Longrightarrow (4-x^2)^2 + x^2(4-x^2) - 2x^2 = 0 \\ &\Longrightarrow 3x^2 - 8 = 0 \\ &\Longrightarrow x = \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

(se eligió solamente la raíz positiva pues $x > 0$ en el dominio A). (0,5pts.)

Por lo tanto el único punto crítico es $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, que es mínimo local pues es punto crítico de una función convexa. (0,5pts.)

c) Tenemos que probar que el mínimo local que se encontró en *b)* es el que minimiza la función f en todo A. Una manera de hacerlo es la siguiente: como f es estrictamente convexa en todo su dominio, entonces su gráfico se encuentra sobre el plano tangente en cualquier punto, es decir,

$$f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{y}) + df(\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \text{ para todo } \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \text{ en } A.$$

Se elige $\mathbf{y} = \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, entonces $df(\mathbf{y}) = [0\ 0]$ (pues es punto crítico) y

$$f(x,y) > f\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right) \text{ para todo } (x,y) \neq \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right) \text{ en } A,$$

lo que prueba la minimalidad global en $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$. (1,0pts.)

Para probar que f no alcanza su máximo en su dominio A basta chequear solamente uno de los límites sugeridos.

Elegimos comprobar el primer límite sugerido: $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = +\infty$, con $(a,b) \in \text{Fr}(A)$. Primero hay que notar que, como $x, y > 0$, entonces

$$f(x,y) > -2\ln(x) - \ln(y).$$

Si $(a,b) \in \text{Fr}(A)$, entonces $a = 0$ ó $b = 0$. por lo tanto

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) > \lim_{(x,y)\to(a,b)} -2\ln(x) - \ln(y) = +\infty. \qquad \text{(1,0pts.)}$$

<u>Observación 1:</u>(parte *c)*) Si se hubiera deseado comprobar el segundo límite sugerido, una posible manera es la siguiente:

Como $x, y > 0$, entonces $f(x,y) > \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2\ln(x) + y^2 - \ln(y)$. Cuando $\|(x,y)\| \to +\infty$, entonces hay dos posibilidades:

- $x \to +\infty$. En este caso (usando la indicación)

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2\ln(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \ln 4 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

- $y \to +\infty$. Acá también usamos la indicación, y suponiendo que $y > 1$

$$y^2 - \ln(y) > y - \ln(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} +\infty$$

Además, como las funciones $g(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2\ln(x)$ y $h(y) = y^2 - \ln(y)$ son continuas y coercivas en $(0, +\infty)$ (su límite tanto en 0 como en $+\infty$ es $+\infty$), tienen un mínimo en $(0, +\infty)$. Esto implica que

$$\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x,y) > \lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2\ln(x) + y^2 - \ln(y) = +\infty$$

<u>Observación 2:</u>(parte *a)*) Alternativamente se puede usar otra técnica para demostrar que el mínimo local de f en A es global. Para esto se utilizan los dos límites sugeridos y se define un conjunto truncado, como por ejemplo

$$S = \{(x,y) \in A \,|\, f(x,y) \leq f\left(\tfrac{2\sqrt{6}}{3}, \tfrac{\sqrt{6}}{6}\right) + 10\}.$$

Es claro que $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right) \in S$. Se toma $(x,y) \in A$ y se analizan los casos en que $(x,y) \in S$ y $(x,y) \notin S$.

Si $(x,y) \notin S$, de la definición de S se tiene que $f\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right) < f(x,y)$.

Si $(x,y) \in S$, como la función f tiende a $+\infty$ en la frontera, $S \cap \mathrm{Fr}(A) = \emptyset$. Como f tiende a $+\infty$ cuando $\|(x,y)\| \to +\infty$, entonces S es un conjunto acotado. Además el punto que minimiza f en todo S es $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ pues es el único punto crítico en

$$\mathrm{int}(S) = \{(x,y) \in A \,|\, f(x,y) < f\left(\tfrac{2\sqrt{6}}{3}, \tfrac{\sqrt{6}}{6}\right) + 10\}.$$

Pauta Control 2

Pregunta 2

Auxiliar: Sebastián Pérez

a) Definamos

$$g(x,y,z,w) = y^2 + w^2 - 2xz \quad ; \quad h(x,y,z,w) = x^3 + y^3 + w^3 - z^3.$$

Por el teorema de la función implícita, para encontrar las funciones $y = y(x,z)$ y $w = w(x,z)$ con las propiedades pedidas basta chequear 3 cosas:

- $g(1,-1,1,1) = 0$ y $h(1,-1,1,1) = 0$: Para ver que esto es cierto basta reemplazar los valores (notar que $(1,-1,1,1)$ se dedujo de que $(x,z) = (1,1), y(1,1) = -1$ y $w(1,1) = 1$). (0,3pts.)
- g y h son $\mathcal{C}^\infty$: Esto se cumple pues ambos son polinomios (y por lo tanto todas sus derivadas de orden superior se pueden calcular, y son continuas). (0,2pts.)
- $\left|\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(y,w)}(1,-1,1,1)\right| \neq 0$: Para ver que esto es cierto hay que calcular la matriz correspondiente.

$$\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,w)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial w} \\ \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2w \\ 3y^2 & 3w^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \frac{\partial(g,h)}{\partial(y,w)}(1,-1,1,1) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$$

y el determinante de esta matriz es $-12 \neq 0$. (0,5pts.)

b) Recordar que y y w dependen de (x,z), y que $y(1,1) = -1$ y $w(1,1) = 1$. Derivamos con respecto a x primero [1]

$$\left.\begin{array}{r} y^2 + w^2 - 2xz = 0 \\ x^3 + y^3 + w^3 - z^3 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow[\frac{\partial}{\partial x}]{} \underbrace{\left.\begin{array}{r} 2y\dfrac{\partial y}{\partial x} + 2w\dfrac{\partial w}{\partial x} - 2z = 0 \\ 3x^2 + 3y^2\dfrac{\partial y}{\partial x} + 3w^2\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{array}\right\}}_{(*)} \qquad (0,4pts.)$$

$$\xrightarrow[\big|_{(x,z)=(1,1)}]{} \left.\begin{array}{r} -2\dfrac{\partial y}{\partial x}(1,1) + 2\dfrac{\partial w}{\partial x}(1,1) - 2 = 0 \\ 3 + 3\dfrac{\partial y}{\partial x}(1,1) + 3\dfrac{\partial w}{\partial x}(1,1) = 0 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{r} -\dfrac{\partial y}{\partial x}(1,1) + \dfrac{\partial w}{\partial x}(1,1) - 1 = 0 \\ 1 + \dfrac{\partial y}{\partial x}(1,1) + \dfrac{\partial w}{\partial x}(1,1) = 0 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial w}{\partial x}(1,1) = 0 \ ; \ \frac{\partial y}{\partial x}(1,1) = -1. \qquad (0,3pts.)$$

[1] Para simplificar la escritura, en lugar de anotar $y(x,z), w(x,z), \frac{\partial y}{\partial x}(x,z), \frac{\partial y}{\partial z}(x,z), \frac{\partial w}{\partial x}(x,z)$ y $\frac{\partial w}{\partial z}(x,z)$; se anotará repectivamente $y, w, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial x}$ y $\frac{\partial w}{\partial z}$.

Ahora derivamos con respecto a z

$$\left.\begin{array}{r} y^2+w^2-2xz=0 \\ x^3+y^3+w^3-z^3=0 \end{array}\right\} \xRightarrow[\frac{\partial}{\partial z}]{} \underbrace{\left.\begin{array}{r} 2y\dfrac{\partial y}{\partial z}+2w\dfrac{\partial w}{\partial z}-2x=0 \\ 3y^2\dfrac{\partial y}{\partial z}+3w^2\dfrac{\partial w}{\partial z}-3z^2=0 \end{array}\right\}}_{(**)}$$ (0,4pts.)

$$\xRightarrow[\big|_{(x,z)=(1,1)}]{} \left.\begin{array}{r} -2\dfrac{\partial y}{\partial z}(1,1)+2\dfrac{\partial w}{\partial z}(1,1)-2=0 \\ 3\dfrac{\partial y}{\partial z}(1,1)+3\dfrac{\partial w}{\partial z}(1,1)-3=0 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{r} -\dfrac{\partial y}{\partial z}(1,1)+\dfrac{\partial w}{\partial z}(1,1)-1=0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial z}(1,1)+\dfrac{\partial w}{\partial z}(1,1)-1=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial w}{\partial z}(1,1)=1 \;\; ; \;\; \frac{\partial y}{\partial z}(1,1)=0.$$

(0,3pts.)

Por lo tanto $\nabla y(1,1)=(-1,0)^T$ y $\nabla w(1,1)=(0,1)^T$. (0,1pts.)

c) Como y,w son de clase $\mathcal{C}^\infty$, entonces $H_y(1,1)$ y $H_w(1,1)$ son simétricas, es decir $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x\partial z}(1,1)=\dfrac{\partial^2 y}{\partial z\partial x}(1,1)$ y $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}(1,1)=\dfrac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}(1,1)$. (0,2pts.)

Para los cálculos que siguen, hay que recordar que $y(1,1)=-1, w(1,1)=1, \dfrac{\partial y}{\partial x}(1,1)=-1, \dfrac{\partial y}{\partial z}(1,1)=0, \dfrac{\partial w}{\partial x}(1,1)=0$ y $\dfrac{\partial w}{\partial z}(1,1)=1$. Seguiremos la misma notación resumida de la parte anterior [2] y derivaremos el sistema (*) de la parte anterior con respecto a x y z, y (**) con respecto a z.

$$(*) \xRightarrow[\frac{\partial}{\partial x}]{} \left.\begin{array}{r} 2\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2+2y\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}+2\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2+2w\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \\ 6x+6y\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2+3y^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}+6w\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2+3w^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \end{array}\right\}$$ (0,4pts.)

$$\xRightarrow[\big|_{(x,z)=(1,1)}]{} \left.\begin{array}{r} 2-2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}(1,1)+0+2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(1,1)=0 \\ 6-6+3\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}(1,1)+0+3\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(1,1)=0 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{r} 1-\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}(1,1)+\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(1,1)=0 \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}(1,1)+\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(1,1)=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(1,1)=-\frac{1}{2} \;\; ; \;\; \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(1,1)=\frac{1}{2}.$$ (0,3pts.)

$$(*) \xRightarrow[\frac{\partial}{\partial z}]{} \left.\begin{array}{r} 2\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial y}{\partial x}+2y\dfrac{\partial^2 y}{\partial z\partial x}+2\dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{\partial w}{\partial x}+2w\dfrac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}-2=0 \\ 6y\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial y}{\partial x}+3y^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial z\partial x}+6w\dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{\partial w}{\partial x}+3w^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}=0 \end{array}\right\}$$ (0,4pts.)

$$\xRightarrow[\big|_{(x,z)=(1,1)}]{} \left.\begin{array}{r} 0-2\dfrac{\partial^2 y}{\partial z\partial x}(1,1)+0+2\dfrac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}(1,1)-2=0 \\ 0+3\dfrac{\partial^2 y}{\partial z\partial x}(1,1)+0+3\dfrac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}(1,1)=0 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{r} -\dfrac{\partial^2 y}{\partial z\partial x}(1,1)+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}(1,1)-1=0 \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial z\partial x}(1,1)+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}(1,1)=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}(1,1)=\frac{1}{2} \;\; ; \;\; \frac{\partial^2 y}{\partial z\partial x}(1,1)=-\frac{1}{2}.$$ (0,3pts.)

[2] Por ejemplo, en lugar de anotar $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,z)$, se escribirá simplemente $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

$$(**) \underset{\dfrac{\partial}{\partial z}}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{r} 2\left(\dfrac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 2y\dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2} + 2\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + 2w\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \\ 6y\left(\dfrac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 3y^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2} + 6w\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + 3w^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} - 6z = 0 \end{array}\right\} \qquad \text{(0,4pts.)}$$

$$\underset{\big|_{(x,z)=(1,1)}}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{r} 0 - 2\dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2}(1,1) + 2 + 2\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}(1,1) = 0 \\ 0 + 3\dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2}(1,1) + 6 + 3\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}(1,1) - 6 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{r} -\dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2}(1,1) + 1 + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}(1,1) = 0 \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2}(1,1) + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}(1,1) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}(1,1) = -\frac{1}{2} \ ; \ \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}(1,1) = \frac{1}{2}. \qquad \text{(0,3pts.)}$$

Por lo tanto

$$H_y(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \ ; \ H_w(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(0,2pts.)

d) Usando los elementos calculados anteriormente, se puede calcular el polinomio de Taylos de grado 2 en torno a $(1,1)$ directamente.

$$\begin{aligned} p(x,z) &= y(1,1) + dy(1,1)\begin{pmatrix} x-1 \\ z-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-1, z-1)H_y(1,1)\begin{pmatrix} x-1 \\ z-1 \end{pmatrix} && \text{(0,4pts.)} \\ &= -1 - (x-1) + \frac{1}{2}\left[\frac{(x-1)^2}{2} - (x-1)(z-1) + \frac{(z-1)^2}{2}\right] && \text{(0,1pts.)} \\ &= -x + \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{4} - \frac{xz}{2}. \\ q(x,z) &= w(1,1) + dw(1,1)\begin{pmatrix} x-1 \\ z-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-1, z-1)H_w(1,1)\begin{pmatrix} x-1 \\ z-1 \end{pmatrix} && \text{(0,4pts.)} \\ &= 1 + (z-1) + \frac{1}{2}\left[\frac{-(x-1)^2}{2} + (x-1)(z-1) - \frac{(z-1)^2}{2}\right] && \text{(0,1pts.)} \\ &= z - \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{4} + \frac{xz}{2}. \end{aligned}$$

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

MA2001-3 Cálculo en Varias Variables
Profesor Alexander Frank
Semestre de Primavera, 2014

Pauta Control 2

Pregunta 3

Auxiliar: Sebastián Pérez

a) Los grafos de g y h respectivamente son

$$\mathrm{Gr}(g) = \{(x,y,z) \mid z = x^2 + y^2\} \quad \mathrm{Gr}(h) = \{(x,y,z) \mid z = 2x + y^2\}$$

Considero un punto (x,y,z) en la sección de altura 3 de g, y por lo tanto $z = x^2 + y^2 = 3$.

Considero un punto (u,v,w) en la sección de altura 6 de h, y por lo tanto $w = 2u + v^2 = 6$ (notar que al punto no lo puedo llamar (x,y,z), pues no tiene necesariamente las mismas coordenadas que los puntos considerados en la sección de altura 3 de g). (0,4pts.)

Como es usual, la función a minimizar es la distancia al cuadrado entre un punto $(x,y,3)$ y un punto $(u,v,6)$. Es decir, se quiere minimizar la función

$$f(x,y,u,v) = (x-u)^2 + (y-v)^2 + 9, \quad \text{s.a.} \quad \left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 3 = 0 \\ 2u + v^2 - 6 = 0. \end{array}\right\} \qquad (0{,}6\text{pts.})$$

b) Hay que usar una variable extra para cada restricción. Las llamaremos λ_1 (para la primera restricción) y λ_2 (para la segunda restricción).

El sistema de ecuaciones de las derivadas parciales con respecto a cada variable x, y, u y v queda:

$$2(x-u) = \lambda_1 \cdot 2x + \lambda_2 \cdot 0 = 2x\lambda_1 \qquad (\frac{\partial}{\partial x})$$

$$2(y-v) = \lambda_1 \cdot 2y + \lambda_2 \cdot 0 = 2y\lambda_1 \qquad (\frac{\partial}{\partial y})$$

$$-2(x-u) = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 2 = 2\lambda_2 \qquad (\frac{\partial}{\partial u})$$

$$-2(y-v) = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 2v = 2v\lambda_2, \qquad (\frac{\partial}{\partial v})$$

(1,0pts.)

y hay que agregar las restricciones

$$x^2 + y^2 - 3 = 0$$
$$2u + v^2 - 6 = 0. \qquad (0{,}5\text{pts.})$$

c) El sistema que hay que resolver es el que está formado por las 6 ecuaciones de la parte anterior. Vamos a resolver dicho sistema dividiendo la 1ra con la 3ra, y la 2da con la 4ta.

Primero hay que descartar algunos casos (hay que analizar aparte el caso $\lambda_2 = 0$ y $v = 0$). (0,3pts.)

- Caso $\lambda_2 = 0$. De la 3ra y 4ta ecuaciones se deduce que $x = u$ e $y = v$. Reemplazando en las primeras dos ecuaciones se deduce que $2x\lambda_1 = 0$ y $2y\lambda_1 = 0$. Hay dos posibilidades: $\lambda_1 = 0$ ó $\lambda_1 \neq 0$. Si suponemos esto último, que $\lambda_1 \neq 0$, entonces $x = 0$ e $y = 0$. Reemplazamos en la primera restricción y obtenemos que $3 = 0$, lo que no puede ser, luego la única posibilidad es $\lambda_1 = 0$. (0,3pts.)

Recapitulando, en el caso de que $\lambda_2 = 0$ se tiene que $x = u, y = v$ y $\lambda_1 = 0$. En la segunda restricción reemplazamos u por x y v por y

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 3 \\ 2x + y^2 = 6 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 3 \\ y^2 = 6 - 2x \end{array}\right\} \Longrightarrow x^2 + 6 - 2x = 3 \Longrightarrow x^2 - 2x + 3 = 0.$$

No se puede encontrar x a partir de esta ecuación (no tiene soluciones reales, su discriminante es negativo), y por lo tanto el caso $\lambda_2 = 0$ no entrega soluciones. (0,3pts.)

- Caso $v = 0$. De la 4ta ecuación se deduce que $y = 0$. En la primera restricción reemplazamos $y = 0$ obteniendo $x = \pm\sqrt{3}$. En la segunda restricción reemplazamos $v = 0$ para obtener $u = 3$.
  Por lo tanto de este caso obtenemos los puntos $(x, y, u, v) = (\sqrt{3}, 0, 3, 0)$ y $(x, y, u, v) = (-\sqrt{3}, 0, 3, 0)$. (0,3pts.)

- Caso $\lambda_2 \neq 0$ y $v \neq 0$. Este es el caso en el que podemos dividir la 1ra ecuación con la 3ra, y la 2da con la 4ta. Notemos que también se tiene $\lambda_1 \neq 0$, pues si $\lambda_1 = 0$ entonces $x = u$, y la tercera ecuación quedaría $0 = 2\lambda_2$, lo que no puede ser. Dividiendo las ecuaciones respectivas tenemos:

$$-1 = \frac{x\lambda_1}{\lambda_2} \quad ; \quad -1 = \frac{y\lambda_1}{v\lambda_2}. \qquad \text{(0,3pts.)}$$

Como $\lambda_1 \neq 0$, entonces dividiendo estas ecuaciones se obtiene (notar que $y \neq 0$, pues si no la segunda de estas últimas ecuaciones quedaría $-1 = 0$)

$$1 = \frac{xv}{y} \Longrightarrow y = xv. \qquad (*)$$

(0,3pts.)

De la 3ra y 4ta ecuaciones y (*) tenemos

$$\left.\begin{array}{l} -2(x-u) = 2\lambda_2 \\ -2(xv - v) = 2v\lambda_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} u - x = \lambda_2 \\ 1 - x = \lambda_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow u = 1 \qquad \text{(0,3pts.)}$$

Reemplazando $u = 1$ en la segunda restricción obtenemos $v = \pm 2$.

- $v = 2$. En este caso (*) dice $y = 2x$, y usando la primera restricción se tiene

$$x^2 + (2x)^2 = 3 \Longrightarrow 5x^2 = 3 \Longrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{15}}{5}.$$

  Tenemos los puntos $(x, y, u, v) = \left(\frac{\sqrt{15}}{5}, \frac{2\sqrt{15}}{5}, 1, 2\right)$ y $(x, y, u, v) = \left(-\frac{\sqrt{15}}{5}, -\frac{2\sqrt{15}}{5}, 1, 2\right)$.

- $v = -2$. Tenemos $y = -2x$, y usando la primera restricción tenemos nuevamente $x = \pm\frac{\sqrt{15}}{5}$. Es decir, tenemos $(x, y, u, v) = \left(\frac{\sqrt{15}}{5}, -\frac{2\sqrt{15}}{5}, 1, -2\right)$ y $(x, y, u, v) = \left(-\frac{\sqrt{15}}{5}, \frac{2\sqrt{15}}{5}, 1, -2\right)$.

(0,4pts.)

d) Hay que reemplazar en f las 6 soluciones para (x,y,u,v) encontradas en la parte anterior.

$$\left(\sqrt{3},0,3,0\right) \xrightarrow{f} \left(\sqrt{3}-3\right)^2 + (0-0)^2 + 9 = 21 - 6\sqrt{3} \approx 10,6077$$
$$\left(-\sqrt{3},0,3,0\right) \xrightarrow{f} \left(-\sqrt{3}-3\right)^2 + (0-0)^2 + 9 = 21 + 6\sqrt{3} \approx 31,3923$$
$$\left(\frac{\sqrt{15}}{5},\frac{2\sqrt{15}}{5},1,2\right) \xrightarrow{f} \left(\frac{\sqrt{15}}{5}-1\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{15}}{5}-2\right)^2 + 9 = 17 - 2\sqrt{15} \approx 9,254$$
$$\left(-\frac{\sqrt{15}}{5},-\frac{2\sqrt{15}}{5},1,2\right) \xrightarrow{f} \left(\frac{-\sqrt{15}}{5}-1\right)^2 + \left(-\frac{2\sqrt{15}}{5}-2\right)^2 + 9 = 17 + 2\sqrt{15} \approx 24,746$$
$$\left(\frac{\sqrt{15}}{5},-\frac{2\sqrt{15}}{5},1,-2\right) \xrightarrow{f} \left(\frac{\sqrt{15}}{5}-1\right)^2 + \left(-\frac{2\sqrt{15}}{5}+2\right)^2 + 9 = 17 - 2\sqrt{15} \approx 9,254$$
$$\left(-\frac{\sqrt{15}}{5},\frac{2\sqrt{15}}{5},1,-2\right) \xrightarrow{f} \left(-\frac{\sqrt{15}}{5}-1\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{15}}{5}+2\right)^2 + 9 = 17 + 2\sqrt{15} \approx 24,746 \qquad (0{,}3\text{pts.})$$

El conjunto de las restricciones no es compacto, porque la sección de altura 6 de h es una parábola. Para ver que la distancia mínima se encuentra entre los valores encontrados, notamos que si $\|(u,v)\| \to +\infty$ en la segunda restricción, entonces $f(x,y,u,v) \to +\infty$ también. (0,4pts.)

Luego la mínima distancia entre la sección de altura 3 de g y la sección de altura 6 de h es $\sqrt{17-2\sqrt{15}}$. (0,3pts.)