

Guía de estudio 5

Temas: Gradiente y Plano Tangente

Profesor: Alexander Frank M.
Auxiliar: Maximiliano S. Lioi

P1 Calcular el plano tangente al grafo de la función $z = f(x, y)$ en el punto indicado

- (a) $z = x^3 + y^3 - 6xy$, en $(1, 2, -3)$
- (b) $z = \cos(x) \sin(y)$, en $(0, \pi/2, 1)$
- (c) $z = \ln(x^2 + 2y + 1) + \int_0^x \cos(t^2) dt$ $y > -\frac{1}{2}, x \in \mathbb{R}$, en $(0, 1, \ln(3))$

P2 Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua y diferenciable. Sea $G_f = \{(\vec{x}, f(\vec{x})) : \vec{x} \in \text{Dom}(f)\}$ el grafo de f . Sea además $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x, y, z) = z - f(x, y)$.

- (a) Mostrar que G_f corresponde a un conjunto de nivel de F . Luego demostrar que $\nabla F = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$.
- (b) Encontrar el vector normal y el plano tangente a G_f para la función $(x, y) \mapsto f(x, y) = xy + ye^x$ en el punto $(1, 1)$.

P3 Se pide encontrar el plano tangente al grafo de la función s en el punto $(\vec{a}, s(\vec{a}))$, donde $\vec{a} = (1, 1)$, sabiendo que se tienen las siguientes condiciones

- (i) $s = q \circ p$.
- (ii) $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciable en $(1, 1)$.
- (iii) $q(x, y, z) = (\ln(x^2 + y^2), x\sqrt{y}, e^{xyz})$ es diferenciable en $p(1, 1) = (1, 1, 0)$ y además

$$Dp(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

P4 Sea la superficie dada por $S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2\right)^2 = 1 \right\}$.

- (i) Encuentre los planos tangentes a S en $\left(0, 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $(0, 1, 0)$.
- (ii) Bosqueje la intersección de S con el plano $\{x = 0\}$ (es decir el plano $y - z$). En este bosquejo indique los puntos $\left(0, 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $(0, 1, 0)$ y dibuje los vectores normales a S en tales puntos.

P5 Considere la función $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por la fórmula

$$f(x, y, z) = \frac{e^{xy} + z^2}{1 + \cos^2(xy)}$$

Calcule $\nabla f(x, y, z)$ y encuentre el plano tangente al grafo de f en el punto $(x, y, z) = (0, 3, 2)$.

P6 Considere las funciones $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas respectivamente por $f(x, y) = e^{x-y}$ y $g(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$. Calcular el punto de intersección entre el plano tangente al grafo de f en $(0, 0)$ y la recta que pasa por $(1, 0, 0)$ cuyo vector director es $\nabla g(1, 1, 1)$. **Ind:** Recordar que la ecuación paramétrica de una recta que pasa por (x_0, y_0, z_0) con vector director (d_1, d_2, d_3) es:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(d_1, d_2, d_3) \quad t \in \mathbb{R}$$

P7 Para $a, b, c > 0$, considere el semi-casquete elipsoidal definido por la superficie $\mathcal{E}^+ := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1, z \geq 0\}$. Sea $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{E}^+$, pruebe entonces que el plano tangente a $\mathcal{E}^+$ que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) está dado por

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

P8 Considere la superficie $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z = 0\}$.

(a) Encuentre el plano tangente a S en el punto $(0, -\pi, \pi^2)$.

(b) Considere la curva Γ dada por la parametrización $\sigma(t) := (t \sin t, t \cos t, t^2)$. Pruebe que $\Gamma \subset S$ y que pasa por $(0, -\pi, \pi^2)$. ¿Para cual t ocurre esto último?.

P9 Sea $(x, y, z) \mapsto F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} + (x^2 + y^2)^{3/2} - z$ y la superficie S definida por $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$. Encontrar un vector $\vec{v}$ normal a S en un punto cualquiera de la superficie $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. Calcular el coseno del ángulo θ formado por el vector $\vec{v}$ y el eje OZ . Determine el límite de $\cos \theta$ cuando $(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)$.

P10 Un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se dice conexo por caminos si para todo par de puntos $x, y \in \Omega$ existe una función $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable en $[0, 1]$ tal que

$$\gamma(0) = x, \quad \gamma(1) = y, \quad \gamma(t) \in \Omega \quad \forall t \in [0, 1]$$

esto es, un camino diferenciable que une los puntos x y y dentro de Ω . Demuestre que si Ω es conexo por caminos y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en Ω y satisface

$$\nabla f(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

entonces f es constante. De un contraejemplo a esta afirmación si Ω no es conexo por caminos.

Ind: Fije un punto $x_0 \in \Omega$ y considere para $y \in \Omega$ un camino diferenciable $\gamma(t)$ con $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(1) = y$. Estudie $t \mapsto \phi(t) = f(\gamma(t))$.