Auxiliar 9: Teorema del Valor Medio, Gradiente y Plano Tangente

Profesor: Alexander Frank M.
Auxiliar: Maximiliano S. Lioi

P1 **[Gradiente y Curvas de Nivel]** Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Definimos el conjunto de nivel

$$L_f(c) := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = c\}$$

(i) Demuestre que $\nabla f(p)$ es perpendicular al conjunto de nivel $L_f(f(p))$ para todo $p \in \mathbb{R}^n$
Ind: Si $M \subset \mathbb{R}^n$ una superficie ¨suave¨, el plano tangente a un punto p que denotamos T_pM se puede caracterizar como $T_pM = \{\gamma'(0) \in \mathbb{R}^n | \gamma : (-a, a) \to M$ tal que $\gamma(0) = p\}$, esto es, el plano tangente coincide con el conjunto de todas las velocidades posibles que lleva un camino en M cuando está pasando por el punto p.

(ii) Demuestre que $(\nabla f(x_0), -1)$ es perpendicular a $\mathrm{Gr}(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ en el punto $(x_0, f(x_0))$, concluya que el plano tangente al punto $(x_0, f(x_0))$ viene dado por los $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ que satisfacen la ecuación

$$y = f(x_0) + \nabla f(x_0)^T (x - x_0)$$

P2 **[Aplicaciones: Plano Tangente]** Considere la superficie $\mathcal{H}^+ \subset \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\mathcal{H}^+ := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^2 - y^2 = 1, z > 0\}$$

(i) Determine $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $Gr(f) = \mathcal{H}^+$.

(ii) Pruebe que la ecuación del plano tangente a $\mathcal{H}^+$ en el punto $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{H}^+$ está dada por

$$zz_0 - xx_0 - yy_0 = 1$$

(iii) Determine el punto $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{H}^+$ tal que el plano tangente a $\mathcal{H}^+$ es paralelo al plano OXY.
Ind: Recuerde que dos planos son paralelos si y solo si sus vectores normales son paralelos.

P3 **[Teorema del Valor Medio]**

(a) Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable con U abierto y convexo. Supongamos que $\exists K > 0$ tal que $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| \leq K, \quad \forall x \in U$$

Demuestre que $\exists L > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|$

(b) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, demuestre que existe $\theta \in (0, 1)$ para el cual

$$f(1,1,1) - f(0,0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\theta,\theta,\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(\theta,\theta,\theta) + \frac{\partial f}{\partial z}(\theta,\theta,\theta)$$

Resumen

Definición(Gradiente) Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $x \in U$ abierto. Definimos el gradiente de f en x, denotado $\nabla f(x)$ como el vector de $\mathbb{R}^n$ compuesto por las derivadas parciales de f en x, i.e,

$$\nabla f(x) = Df(x)^T = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x))^T$$

Proposición(Regla de Leibniz) Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciables, entonces

$$\nabla(\langle f, g \rangle)(x) = g(x)\nabla f(x) + f(x)\nabla g(x)$$

Teorema: Si $\nabla f(x_0) \neq 0$, entonces el vector unitario $v_0 = \frac{\nabla f(x_0}{\|\nabla f(x_0)\|}$ representa la dirección de máximo crecimiento de f en el punto x_0

Teorema: El gradiente $\nabla f(x)$ es siempre ortogonal (o normal) a la curva de nivel que pasa por x

Definición(Hiperplano) En $\mathbb{R}^n$ un hiperplano es el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^n$ tales que dado un punto base $x_0 \in \mathbb{R}^n$, el vector que une x_0 y x es ortogonal a otro vector "normal" $N \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, fijo y previamente dado. En otras palabras, el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$\langle N, x - x_0 \rangle = 0$$

Definición(Hipersuperficie) Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1 en U abierto. Una hipersuperficie suave en $\mathbb{R}^n$, definida por f (denotada $S(f)$), es el conjunto de puntos (no vacío) $x \in \mathbb{R}^n$, soluciones de la ecuación

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_d) = 0, \quad x = (x_1, \ldots, x_d),$$

y donde además se satisface $\nabla f(x) \neq 0$ en tales puntos.

En otra palabras, $S(f) := \{x \in U : f(x) = 0, \nabla f(x) \neq 0\}$

Observación La noción de hipersuperficie es muy similar a la noción de conjunto de nivel cero para f que denotamos $N_0(f)$ con la sola diferencia de que ahora pedimos f de clase C^1. En otras palabras, una hipersuperficie es un subconjunto particular del conjunto de nivel cero para f

Definición (Hiperplano tangente) Sea S una hipersuperficie suave determinada por una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Sea también $x_0 \in S$. Definimos el hiperplano tangente a S en x_0 como el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$\langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle = 0$$

Observación: Lo anterior dice que para f diferenciable en x_0, su gradiente es siempre ortogonal a la hipersuperficie definida por f

Teorema: Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable, entonces el hiperplano en $\mathbb{R}^{n+1}$ centrado en $(x_0, f(x_0)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ de ecuación

$$y = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0)$$

es tangente al grafo de f en $(x_0, f(x_0))$. Más aún, el vector

$$\begin{bmatrix} \nabla f(x_0) \\ -1 \end{bmatrix}$$

es perpendicular (o normal) a este hiperplano y al grafo de f

Definición(Conjunto convexo) Sea E un espacio vectorial, diremos que $C \subset E$ es convexo si para cualquier par de puntos $x, y \in C$, el segmento que une x e y, denotado por $[x, y]$ y definido por

$$[x, y] := \{z \in E : z = \lambda x + (1 - \lambda)y, \quad \lambda \in [0, 1]\}$$

está contenido en C.

Definición(Cono) Sea E un espacio vectorial, diremos que $C \subset E$ es un cono si $\forall x \in C$ y $\forall \lambda > 0$ se tiene que $\lambda x \in C$

Teorema(Teorema del Valor Medio) Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en U abierto y convexo. Entonces, para cualquier par de puntos $x, y \in U$, existe $\lambda \in [0, 1]$ tal que

$$f(x) - f(y) = \langle \nabla f(z), x - y \rangle$$

donde $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, es decir $z \in [x, y]$