Auxiliar Extra: Preparación Control 2

Profesor: Alexander Frank M.
Auxiliar: Maximiliano S. Lioi

P1 **[C2 2016-1 - Daniilidis]**
Considere $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dos funciones definidas por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} \left(t, t^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right)\right) & \text{si } t \neq 0 \\ (0,0) & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

(a) Determine para qué direcciones existe la derivada direccional de f en $(x,y) = (0,0)$.

(b) Encuentre las derivadas parciales de f donde existan.

(c) Muestre que g es diferenciable en $t = 0$.

(d) Estudie la diferenciabilidad de $(f \circ g)$ en $t = 0$. Concluya acerca de la diferenciabilidad de f en $(x,y) = (0,0)$.

P2 **[C2 2010-1 - Correa]**
Considere las funciones $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, h : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x,y,z) = (x\sin(z), y\cos(z)), \quad g(x,y) = y^2\cos(x)$$

$$h(x,y) = -y\ln(\cos(x))$$

A partir de estas funciones, se define $\varphi : V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por

$$\varphi(x,y) = f(x+y, g(x,y), h(y,x)).$$

Calcule $D\varphi(x,y)$ y en particular concluya que

$$D\varphi(0,1) = \begin{bmatrix} -\ln(\cos(1)) & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

P3 **[C2 2015-2 - Soto]**
Sea $u : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ y sea $v : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$v(x,y) = u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

Decimos que u es armónica si satisface la *ecuación de Laplace* en su dominio, en este caso

$$\Delta u = 0 \text{ en } \mathbb{R}^2\backslash(0,0)$$

donde $\Delta u = \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2}$. Demuestre que u es armónica en $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ sí y solamente sí v es armónica en $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

P4 **[Ecuación de Ondas] [C2 2016-1 - Del Pino]**
Suponga que $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \varphi = \varphi(x,t)$ es una función de clase C^2 en $\mathbb{R}^2$ que para $c > 0$ satisface

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

Definimos la función auxiliar $\psi(u,v) = \varphi\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right)$, buscamos resolver (1), para ello se proponen los siguientes pasos

(a) Demuestre que

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}(u,v) = 0 \quad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

(b) Deduzca que existen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tales que

$$\varphi(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct).$$

(c) Suponiendo además que $\varphi(x,0) = \varphi_0(x)$ y que $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,0) = \varphi_1(x)$, muestre que

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi_0(x+ct) + \varphi_0(x-ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} \varphi_1(s) ds\right]$$

P5 **[Propuesto] [C2 2011-1 - Coordinado]**
Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ una solución de la *ecuación de Laplace*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v) = 0.$$

Sean $u(x,y), v(x,y)$ funciones diferenciables que satisfacen las *ecuaciones de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \tag{2}$$

Demuestre que la función definida por

$$g(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$$

también satisface la *ecuación de Laplace*:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

P6 **[Propuesto] [C2 2017-1 - Daniilidis]** Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Se definen las funciones $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ por:

$$G(t) = f(t,t,\ldots)$$
$$h(x_1,\ldots,x_n) = G\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)$$

(a) Calcule $G'(t)$ y $\nabla h(x_1,\ldots,x_n)$ en terminos de las derivadas parciales de f.

(b) Demuestre que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (f-h)}{\partial x_i}(x,\ldots,x) = 0$$